UNIVERSITA' DEGLI STUDI DI MILANO
Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Matematica

CURVE ALGEBRICHE DEFINITE SU $\bar{\mathbb{Q}}$

Relatore: Prof. Gian Pietro PIROLA
Relatore interno: Prof. Antonio LANTERI
Correlatore: Prof. Elisabetta COLOMBO

Tesi di Laurea di:
Renzo CAVALIERI
Matr. Nr. 533658

Anno Accademico 1998 - 1999

Indice

Introduzione

Questo lavoro ha l'intenzione di presentare alcuni aspetti di una teoria recentissima, concepita agli inizi degli anni '80 da Grothendieck, che propone un interessante approccio allo studio di curve algebriche definite su $\bar{\mathbb{Q}}$.
$\bar{\mathbb{Q}}$ indica il campo di tutti i numeri algebrici. E' un ente a tuttora abbastanza ignoto e rappresenta in qualche modo il punto di contatto (o piuttosto un punto limite) tra i campi numerici studiati dagli aritmetici ed il campo complesso, su cui lavorano i geometri algebrici. Riuscire a fare della geometria su di esso potrebbe gettare nuovi ponti tra le due discipline, operazione che in matemtica è sempre assai fertile.

Nel 1984 Grothendieck scrive l'*Esquisse d'un programme*, un pamphlét di una trentina di pagine in cui lo studioso raccoglie, in maniera discorsiva ed informale, i principali temi delle proprie ricerche più recenti, con lo scopo di motivare la richiesta di una posizione di ricercatore presso il CNRS francese. In questo lavoro, tra le altre cose, Grothendieck instaura una corrispondenza, in qualche modo biunivoca, tra curve algebriche definite su $\bar{\mathbb{Q}}$ e ciò che lui chiama *dessins d'enfants*; fondamentalmente, dei grafi su superfici topologiche compatte, il cui complementare è un insieme di 2-celle aperte.
Il nostro scopo è di presentare, in maniera consequenziale e dettagliata, il funzionamento di questa corrispondenza. Questo occupa i primi quattro capitoli del nostro lavoro.
Gli ultimi due capitoli sono invece dedicati ad una possibile applicazione, ideata a cavallo tra gli anni '80 e '90 dai russi G.B. Shabat e V. Voevodsky. Essi sfruttano il dato combinatorico dei dessin per costruire delle varietà abeliane che approssimano la Jacobiana della curva associata al dessin.

Il primo capitolo costituisce le "fondamenta classiche" su cui poggia la nostra teoria. In quattro sezioni autonome presentiamo brevemente l'ABC dei rivestimenti, delle superfici di Riemann, della teoria delle forme differenziali armoniche e della varietà Jacobiana. Naturalmente non vantiamo alcuna pretesa di completezza. Questo capitolo è pittosto da intendersi come un prontuario che enuncia in maniera scarna ed essenziale quali risultati di geometria algebrica “classica” vengono utilizzati per stabilire la corrispondenza di Grothendieck.

Nel secondo capitolo presentiamo la teoria dei dessins d’enfants. Definiamo in maniera un po’ più formale questi “scarabocchi”, mediante i quali costruiamo sulla superficie topologica che li supporta una specie di “piastrellatura”. Le “piastrelle” si chiamano *bandiere*. Introduciamo il *gruppo cartografico orientato* $\mathcal{C}_2^+$, che agisce sull’insieme delle bandiere, per giungere infine al *teorema di Malgoire-Voisin*, che mette in bijezione le classi di conjugio di sottogruppi di indice finito di $\mathcal{C}_2^+$ con le classi di isomorfismo di dessins.

Il terzo capitolo è dedicato all’interessante *teorema di Belyi*, che fornisce una caratterizzazione delle superfici di Riemann definite su $\bar{\mathbb{Q}}$: una superficie di Riemann è definita su $\bar{\mathbb{Q}}$ se e solo se ammette un morfismo su $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ ramificato sopra al più tre punti. Questo risultato è fondamentale per stabilire che tutte le curve algebriche definite su $\bar{\mathbb{Q}}$ possono essere rappresentate da un dessin. Chiamiamo quindi *morfismo di Belyi* una funzione meromorfa $\beta : X \longrightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ i cui valori critici sono contenuti nell’ insieme $\{ 0, 1, \infty \}$, *coppia di Belyi* il dato (X, β).

Giungiamo infine nel capitolo quarto ad “impastare tutti gli ingredienti” per ottenere la corrispondenza. Il gruppo $\mathcal{C}_2^+$ è canonicamente isomorfo al gruppo fondamentale π' della sfera bucata in tre punti. Alle classi di conjugio di sottogruppi di indice finito di questi due gruppi corrispondono, rispettivamente, le classi di isomorfismo di dessin e le classi di equivalenza di rivestimenti di $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ ramificati al più sopra quei tre punti. Sfruttando il *teorema di esistenza di Riemann*, a questi rivestimenti associamo delle superfici di Riemann definite su $\bar{\mathbb{Q}}$.
Abbiamo dedicato buona parte del capitolo, una volta stabilita la corrispondenza, a “realizzarla”, spiegando con approccio costruttivo come passare dai disegni alle curve, dalle curve ai disegni, dai disegni ai rivestimenti e dai rivestimenti ai disegni. Abbiamo terminato infine questo capitolo con diversi esempi.

Nel capitolo 5 cambiamo scenario; innanzitutto ci restringiamo a lavorare solo con disegni che triangolano la superficie supporto. Nella parte finale del terzo capito abbiamo mostrato che ogni curva algebrica ammette un morfismo di Beyli *triangolare*, il cui disegno associato è, appunto, triangolare. Questo ci assicura che non “perdiamo” nessuna curva, anche se ci restringiamo a considerare una classe particolare di dessins. Tali disegni realizzano sulla superficie un complesso cellulare, da cui nasce naturalmente un complesso di catene e, per dualità, di cocatene. Realizziamo anche concretamente il complesso duale mediante la costruzione del *disegno duale* ed evidenziamo una serie di isomorfismi che mettono in relazione i vari gruppi

di catene e cocatene. Tra questi isomorfismi particolarmente importante è l'operatore $\star$, che ci permette di definire un prodotto hermitiano sui gruppi di catene/cocatene. Dimostriamo poi che $\star$ può essere definito anche su $H^1(X_D, \mathbb{C})$ e genera anche su di esso un prodotto interno.
Supponendo che questo operatore combinatorico sia, con qualche piccolo aggiustamento, l'analogo dell'operatore armonico $\star$ di Hodge, definiamo come Jacobiana approssimata

$$\mathcal{J}^D(X) := L_D \backslash H^1(X_D, \mathbb{C})/H^1(X_D, \mathbb{Z}),$$

laddove L_D è la somma degli autospazi relativi agli autovalori di $\star$ con parte immaginaria positiva.
Questo è il capitolo in cui maggiormente abbiamo lavorato in maniera originale; tutta questa costruzione è appena accennata in [SV1], noi abbiamo cercato di renderla esplicita e di dimostrare, creando dei parallelismi con la teoria di Hodge, tutti i passaggi intermedi che la rendono plausibile.

Il capitolo finale propone la dimostrazione effettuata da Shabat e Voevodsky che le Jacobiane approssimate sopra definite in realtà convergono alla Jacobiana vera e propria della curva di partenza, quando si raffini il disegno in maniera canonica. Questa dimostrazione è contenuta in un articolo scritto attorno al 1989, che tuttavia non è mai stato pubblicato. Il Professor Voevodsky ci ha gentilmente inviato la copia personale di una versione pre-print di tale lavoro. E' stato nostro compito il comprendere bene il procedimento dimostrativo delineato in maniera abbastanza oscura nell'articolo, ed effettuare le tante verifiche ivi omesse. Ci siamo anche permessi di fare una piccola correzione a quanto scritto nell'articolo: abbiamo alterato i coefficienti nella definizione della mappa φ. Diversi controlli incrociati avvalorano la nostra scelta.

Lavorare a questa tesi ha significato per me introdurmi ad una teoria affascinante, di cui mi rendo conto di aver esplorato, e per ora di avere gli strumenti per esplorare, una piccola parte. Una delle difficoltà di cercare di addentrarsi in una teoria così recente sta nell'assoluta scarsità di riferimemnti in letteratura. I pochi libri ed articoli specifici esistenti sono intesi principalmente per gli "addetti ai lavori", quindi di comprensione abbastanza ostica. Spesso molti passaggi, che si ottengono per analogia con teorie classiche, sono ritenuti triviali e quindi omessi. Scrivendo quindi il mio lavoro ho inteso anche proporre un documento che possa "essere letto" e servire ad uno studente di secondo biennio, con un buon background geometrico, che voglia introdursi a questi argomenti. A tal fine ho incluso un gran numero di esempi. Ho inoltre scelto un tono espositivo abbastanza informale, pur con la massima attenzione che ciò non compromettesse la precisione di quanto affermato. La speranza è di avere ottenuto un testo di lettura fluida che, oltre che descrivere con precisione la materia trattata, aiuti a sviluppare verso di essa anche una certa intuizione.

Capitolo 1

Uno sguardo ai classici

Questo primo capitolo è interamente classico. L'intenzione che lo genera è di presentare, seppur in "toccata e fuga", tutto quel materiale che costituisce le fondamenta su cui poggerà il nostro approccio alla teoria delle curve algebriche su $\bar{\mathbb{Q}}$. Il capitolo è diviso in quattro sezioni tra loro indipendenti. Non ho idea di quanti volumi siano stati scritti in letteratura su ciò che qui è stato condensato in poco più di una decina di pagine; questa incredibile concentrazione porta naturalmente ad alcuni inconvenienti: per esempio a volte siamo forzati a dare per noti termini o concetti logicamente successivi a concetti che invece introduciamo. Nulla di quanto diciamo, ad eccezione del teorema di esistenza di Riemann, che è particolarmente importante per i nostri scopi, è stato dimostrato. Paragrafo per paragrafo abbiamo dato indicazioni bibliografiche utili per recuperare con maggior completezza le informazioni date.

1.1 Rivestimenti

1.1.1 Definizioni e prime proprietà

Siano $X, \tilde{X}$ due spazi topologici, $p : \tilde{X} \longrightarrow X$ un'applicazione continua. Un aperto $U \subseteq X$ è detto *uniformemente rivestito* da p se la retroimmagine $p^{-1}(U)$ è un' unione disgiunta di aperti di $\tilde{X}$ omeomorfi ad U tramite l'applicazione p.
La terna $(X, \tilde{X}, p)$ si dice un *rivestimento* se ogni punto $x \in X$ ammette un intorno uniformemente rivestito.
L'applicazione p si chiama *projezione*, X è detto *spazio base* ed $\tilde{X}$ *spazio totale*. La cardinalità della fibra sopra un qualsiasi punto dello spazio base (che non cambia al cambiare del punto) è detta *grado del rivestimento*.

Due rivestimenti $p : \tilde{X} \longrightarrow X$ e $p' : \tilde{X}' \longrightarrow X$ si dicono equivalenti se esiste un omeomorfismo $f : \tilde{X}' \longrightarrow \tilde{X}$ tale che $p \circ f = p'$.

I rivestimenti sono enti elementari ed assai comuni in geometria. Per citare solo un paio di esempi che sicuramente avrete già incontrato, la retta $\mathbb{R}$ riveste la circonferenza mediante la mappa esponenziale complessa, mentre il piano riveste il toro (che otteniamo quozientando il piano stesso per un reticolo di rango due) mediante la projezione naturale.

Segue ora una velocissima carrellata sulle prime proprietà dei rivestimenti. Per chi fosse interessato alle dimostrazioni o ad una trattazione più accurata dell' argomento, [Fu] è un ottimo testo di riferimento.

Teorema 1. *Sia $p : \tilde{X} \longrightarrow X$ un rivestimento, allora p è aperta ed X ha la topologia quoziente relativa a p.*

Consideriamo il rivestimento $p : \tilde{X} \longrightarrow X$. Sia Y uno spazio topologico e $f : Y \longrightarrow X$ un'applicazione continua. Un' applicazione $\tilde{f} : Y \longrightarrow \tilde{X}$ viene detta *sollevamento* di f se $p \circ \tilde{f} = f$.

Teorema 2. *Sia $p : \tilde{X} \longrightarrow X$ un rivestimento, $f : Y \longrightarrow X$ una mappa continua. Siano $\tilde{f}, \tilde{f}'$ due sollevamenti di f. Se Y è connesso ed esiste un punto y_0 con $\tilde{f}(y_0)$=$\tilde{f}'(y_0)$, allora $\tilde{f} \equiv \tilde{f}'$.*

Cioè se due sollevamenti coincidono su un punto, allora sono la stessa applicazione. E' una propietà di unicità molto forte che globalizza le ovvie proprietà locali.

Teorema 3 (di sollevamento dei cammini e delle omotopie). *Sia $p : \tilde{X} \longrightarrow X$ un rivestimento. Allora:*

- *per ogni arco $\alpha : I \longrightarrow X$, per ogni punto $\tilde{x}$ sulla fibra di $x = f(0)$, esiste ed è unico l'arco $\tilde{\alpha}$ sollevato di α con punto di inizio $\tilde{x}$;*

- *per ogni omotopia di cammini $F : I \times I \longrightarrow X$ e per ogni punto $\tilde{x}$ sulla fibra di $x = F(0,0)$, esiste ed è unica la funzione $\tilde{F} : I \times I \longrightarrow \tilde{X}$ che solleva F in modo che $\tilde{F}(0,0) = \tilde{x}$.*

Da questo teorema discende immediatamente come corollario il notevole

Teorema 4 (di monodromia). *Siano α_0 ed α_1 due archi omotopi, $\tilde{\alpha}_0$ e $\tilde{\alpha}_1$ archi sollevati a partire dal medesimo punto iniziale, allora $\tilde{\alpha}_0$ e $\tilde{\alpha}_1$ hanno uguale punto finale.*

1.1.2 Rivestimenti e gruppo fondamentale

Dato un rivestimento, è utile ed interessante investigare le relazioni che intercorrono tra il gruppo fondamentale dello spazio base e quello dello spazio totale.
Sia $p : \tilde{X} \longrightarrow X$ un rivestimento, $x \in X$, $\tilde{x}_0 \in \tilde{X}$ sulla fibra di x. In modo naturale, per composizione, è indotta una freccia $p_* : \Pi(\tilde{X}, \tilde{x_0}) \longrightarrow \Pi(X, x)$. Il teorema di sollevamento delle omotopie ci assicura che questo morfismo è injettivo. In particolare l'immagine $p_*\Pi(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ è un sottogruppo del gruppo fondamentale $\Pi(X, x)$.
Se io scelgo un punto $\tilde{x}_1 \neq \tilde{x}_0$ della fibra di x, $p_*\Pi(\tilde{X}, \tilde{x}_1)$ è un diverso sottogruppo di $\Pi(X, x)$. Il mondo sarebbe profondamente ingiusto se questi due sottogruppi non fossero in qualche modo imparentati. Ed infatti lo sono, come mostra il seguente:

Teorema 5. *Sia $p : \tilde{X} \longrightarrow X$ un rivestimento. $\tilde{X}$ connesso per archi. Per ogni $\tilde{x}_0, \tilde{x}_1 \in \tilde{X}$ esiste un arco f da $x_0 = p(\tilde{x}_0)$ a $x_1 = p(\tilde{x}_1)$ tale che*

$$u_f p_*\Pi(\tilde{X}, \tilde{x}_0) = p_*\Pi(\tilde{X}, \tilde{x}_1)$$

dove la funzione u_f è così definita:

$$u_f : \Pi(X, x_0) \longrightarrow \Pi(X, x_1)$$

$$[\alpha] \longmapsto [f^{-1} \cdot \alpha \cdot f].^1$$

Se ora scegliamo $\tilde{x}_0$ ed $\tilde{x}_1$ sulla fibra di x_0, f è un cappio di base x_0, quindi il rappresentante di un elemento di $\Pi(X, x_0)$. In questo caso particolare il teorema si rilegge

$$p_*\Pi(\tilde{X}, \tilde{x}_1) = [f]^{-1} \cdot (p_*\Pi(\tilde{X}, \tilde{x}_1)) \cdot [f].$$

I due sottogruppi sono quindi tra loro conjugati.
Non è eccessivamente difficile a questo punto verificare che l'insieme $\Lambda = \{\ p_*\Pi(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$, con $\tilde{x}_0$ appartenente alla fibra di $x_0\ \}$ è una classe di conjugio di sottogruppi di $\Pi(X, x_0)$. Naturalmente se $p' : \tilde{X}' \longrightarrow X$ è un rivestimento equivalente a $p : \tilde{X} \longrightarrow X$, la classe di conjugio da esso individuata resta la stessa. Abbiamo quindi costruito una corrispondenza

$$\left\{ \begin{array}{c} \textit{classi di equivalenza} \\ \textit{di rivestimenti} \\ \textit{su uno spazio base } X \end{array} \right\} \hookrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \textit{classi di conjugio di} \\ \textit{sottogruppi del gruppo} \\ \textit{fondamentale di } X \end{array} \right\}.$$

[1] il simbolo $\cdot$ indica la composizione di cammini. Essa si legge da sinistra a destra.

Con un po' di lavoro aggiuntivo, che prontamente eviterò di fare (rimando a [K] per chi fosse interessato), si dimostra che questa corrispondenza è in realtà una *bijezione*. Affinchè questo risultato valga bisogna in realtà aggiungere, oltre alla connessione per archi, alcune ipotesi di regolarità sugli spazi topologici considerati, ma si tratta di ipotesi talmente blande che non mi sento troppo in colpa ad ometterle.

Alla classe di conjugio dell'intero gruppo fondamentale corrisponde sempre la classe di rivestimenti individuata dall'applicazione identica da X in se stesso. All' altro estremo, il rivestimento che corrisponde alla classe di conjugio del sottogruppo banale è detto *rivestimento universale* di X. Possiamo dedurre che per ogni spazio topologico "abbastanza bello" (il che, come abbiamo detto, vuol dire poco più che connesso per archi[2]) esiste ed è unico uno spazio semplicemente connesso che lo riveste. Supponiamo che tutti gli spazi che tratteremo d'ora in poi godano di questa proprietà.

1.1.3 Il gruppo di monodromia

Siano $p : \tilde{X} \longrightarrow X$ un rivestimento di grado d finito, $x \in X$ e $p^{-1}(x) = \{x_1, ..., x_d\}$ la fibra di x in $\tilde{X}$. Consideriamo un cappio α di base x e solleviamolo a partire da ogni punto della fibra di x. I punti finali dei cammini sollevati operano una sostituzione sull'insieme $\{x_1, ..., x_d\}$. Possiamo quindi definire una mappa

$$\varphi : \Pi(X, x) \longrightarrow S_d,$$

dove S_d è il gruppo delle sostituzioni di d elementi. E' elementare verificare che tale freccia è un omomorfismo di gruppi. L'immagine $Im\varphi := \mathcal{M}$ è un sottogruppo di S_d detto *gruppo di monodromia* associato al rivestimento p. Se lo spazio totale $\tilde{X}$ è connesso, $\mathcal{M}$ è un sottogruppo transitivo di S_d. Consideriamo il sottogruppo $p_*\Pi(\tilde{X}, x_i)$ di $\Pi(X, x)$ ed interpretriamone il significato in questa corrispondenza. Tale sottogruppo è l'insieme dei cappi di base x che, sollevati a partire dal punto x_i restano cappi. La loro immagine via φ sono le sostituzioni che fissano il simbolo "i". Il nucleo $ker\varphi$ di questa mappa è costituito invece da quei cappi che, comunque sollevati, restano cappi. Cioè

$$ker\varphi = \bigcap_{fibra\ di\ x} p_*\Pi(\tilde{X}, x_i).$$

[2]Sono sovrastato dai sensi di colpa. La condizione di regolarità richiesta è la *semi − locale semplice connessione*. Cioè ogni punto x deve ammettere un intorno U tale che l'omomorfismo $i_* : \Pi(U, x) \longrightarrow \Pi(X, x)$ è banale, vale a dire che ogni arco chiuso in U di base x è equivalente in X al cammino banale ε_x. Vi viene in mente qualcosa di abbastanza mostruoso che non goda di tale proprietà? Un semplice esempio si trova a pag. 195 di [K].

Sicuramente $ker\varphi$ è un sottogruppo normale di $\Pi(X,x)$. Quando un sottogruppo $p_*\Pi(\tilde{X},x_i)$ è normale in $\Pi(X,x)$? Per ogni $f \in p_*\Pi(\tilde{X},x_i)$ e per ogni cappio α di base x deve accadere che $\alpha^{-1} \cdot f \cdot \alpha$ sia ancora un elemento di $p_*\Pi(\tilde{X},x_i)$. Detto a parole, poichè α "sposta" il punto base da cui poi solleviamo il cammino f, deve accadere che f resti un cappio quando lo sollevo a partire da un qualsiasi punto della fibra. Abbiamo quindi scoperto che

$$p_*\Pi(\tilde{X},x_i) \trianglelefteq \Pi(X,x) \Leftrightarrow p_*\Pi(\tilde{X},x_i) = p_*\Pi(\tilde{X},x_j) \forall i,j \Leftrightarrow p_*\Pi(\tilde{X},x_i) = ker\varphi.$$

Introduciamo ora il gruppo $G(\tilde{X},p,X)$ delle *trasformazioni di rivestimento*, costituito dagli omeomorfismi h di $\tilde{X}$ in se stesso tali che $p \circ h = p$. E' naturalmente indotta una mappa da $G(\tilde{X},p,X)$ in $\mathcal{M}$. Quando $p_*\Pi(\tilde{X},x_i)$ è normale, abbiamo la bellissima proprietà che tale mappa diventa un isomorfismo.

1.2 Superfici di Riemann

1.2.1 Superfici di Riemann e curve algebriche

Una *superficie di Riemann* X è una varietà analitica complessa di dimensione uno. Ciò significa:

- X è una varietà topologica;
- esiste un ricoprimento aperto $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ di X ed una collezione di omeomorfismi $\{z_\alpha\}$ con $z_\alpha : U_\alpha \longrightarrow V_\alpha \subseteq \mathbb{C}$, tale che per ogni α, β l'applicazione di transizione

$$\Phi_{\alpha\beta} = z_\beta \circ z_\alpha^{-1} : z_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \longrightarrow z_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$$

  è una funzione olomorfa.

Le mappe z_α si dicono *carte locali* e l'insieme $\mathcal{A}$ di tutte le coppie (U_α, z_α) si dice *atlante*. Due atlanti si dicono *compatibili* se la loro unione è ancora un atlante. Una classe di compatibilità di atlanti su X si dice *struttura analitica*.

Noi siamo in particolare interessati alle superficie di Riemann compatte. A meno che diversamente specificato intendiamo compatte tutte le superfici di Riemann che incontreremo.

Ogni superficie di Riemann ha un' orientazione naturale; se infatti si scrivono le mappe di transizione in termini di parte reale e parte immaginaria, è immediato verificare che la matrice Jacobiana ha determinante positivo. Dal punto di vista topologico quindi una superficie di Riemann è un g-toro. Notiamo però che sulla stessa varietà topologica possono convivere strutture analitiche diverse.

Curve algebriche

Un insieme algebrico projettivo $I \subseteq \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ è il luogo degli zeri in $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ di un numero finito di polinomi omogenei $F_1, ..., F_n$. Esso si dice *irriducibile* se non può essere decomposto nell'unione non banale di due sottoinsiemi algebrici I_1, I_2. Un sottoinsieme algebrico irriducibile si dice anche *varietà algebrica.* E' immediato vedere che una varietà algebrica è in realtà una sottovarietà analitica di $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$, poichè i polinomi possono essere riguardati come funzioni olomorfe definite su $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$.

Una *curva algebrica* è una varietà algebrica di dimensione uno. Una curva algebrica liscia è una sottovarietà analitica liscia di $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ e come tale, per il teorema del Dini, una superficie di Riemann.
Una curva algebrica singolare può sempre essere desingolarizzata mediante un numero finito di applicazioni birazioniali (scoppiamenti, ...). A meno di equivalenza birazionale, quindi, le curve algebriche projettive sono superfici di Riemann.
Un risultato non banale ci assicura che, data una superficie di Riemann X, essa ammette un embedding in un opportuno spazio projettivo complesso $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$. A questo punto è sufficiente invocare il *teorema di Chow* per concludere che l'immagine di X mediante l'embedding è una curva algebrica liscia in $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$.
Quindi dal punto di vista dell' equivalenza birazionale, superfici di Riemann e curve algebriche sono la stessa cosa. Se invece ci interessa l' equivalenza a meno di biolomorfismi, dobbiamo restringere la corrispondenza alle curve algebriche liscie.

Apriamo ora una breve parentesi non classica. Mi sembra adatto a questo punto introdurre i "personaggi" che diventeranno i protagonisti di questo lavoro.

Curve su $\bar{\mathbb{Q}}$

Per definire una superficie di Riemann su $\bar{\mathbb{Q}}$ è sufficiente ripercorrere la definizione di superficie di Riemann classica, sostituendo $\bar{\mathbb{Q}}$ a $\mathbb{C}$ ovunque esso appaia. Per quanto riguarda le funzioni $\bar{\mathbb{Q}}$-olomorfe, le possiamo pensare come le funzioni localmente sviluppabili in serie di potenze a coefficienti in $\bar{\mathbb{Q}}$.

Una curva algebrica definita su $\bar{\mathbb{Q}}$ è invece, più semplicemente, una curva algebrica che ammette equazioni in $\bar{\mathbb{Q}}$, cioè che può essere definita dall'annullarsi di un numero finito di polinomi omogenei a coefficienti in $\bar{\mathbb{Q}}$.

1.2.2 Mappe olomorfe

Se X ed Y sono superfici di Riemann, una applicazione $f: Y \longrightarrow X$ si dice *olomorfa nel punto* $y \in Y$ se esistono intorni coordinati $U \ni y$, $V \ni f(y)$ e carte locali $z: U \longrightarrow \mathbb{C}$, $w: V \longrightarrow \mathbb{C}$ tali che la composizione

$$w \circ f \circ z^{-1}: \ z(U \cap f^{-1}(V)) \longrightarrow w(f(U) \cap V)$$

è una funzione olomorfa. In modo ovvio f si dice una *applicazione olomorfa* se è tale in ogni punto $y \in Y$.
In particolare se scegliamo $X = \mathbb{C}$, diremo che f è una $funzione$ olomorfa. Per $X = \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$, f sarà invece detta $funzione\ meromorfa$.

Osserviamo che un'applicazione olomorfa non costante è sempre aperta. Quindi in particolare le uniche funzioni olomorfe globali su una superficie di Riemann sono le costanti.
Sia ora $f: Y \longrightarrow X$ un' applicazione olomorfa non costante tra due superfici di Riemann, ed y un punto di Y. Pur di scegliere opportunamente le carte locali, f ammette un' espressione locale del tipo

$$w = z^k, \qquad k \geq 1.$$

L'intero k si chiama *ordine di ramificazione* di f in y; verrà indicato col simbolo $b_f(y)$.
Il punto y si dice *punto di ramificazione* per f se $b_f(y) > 1$.
La mappa $w = z^k$ è ben nota. Essa manda lo 0 nello 0; altrove è un rivestimento di grado k. In verità questa proprietà locale si globalizza. Una applicazione olomorfa non costante tra superfici di Riemann, tolto un numero finito di punti "cattivi", è un rivestimento di grado finito. L' enunciato preciso è:

Teorema 6. *Sia f: $Y \longrightarrow X$ un'applicazione olomorfa non costante tra superfici di Riemann.*

1. *V'è un numero finito di punti di ramificazione. Denotiamo con R l'insieme dei punti di ramificazione, con S l'insieme delle immagini di tali punti mediante f.*

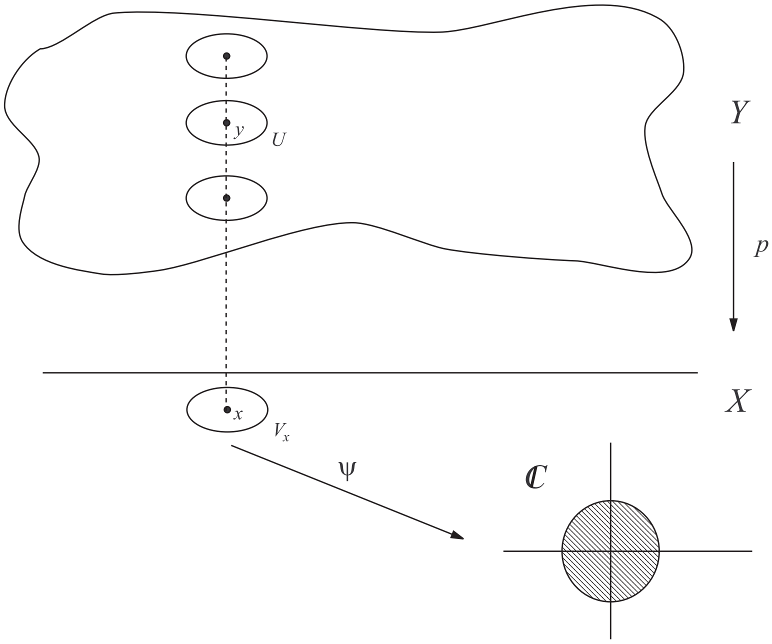
2. *La restrizione $f_{|Y \setminus f^{-1}(S)}: Y \setminus f^{-1}(S) \longrightarrow X \setminus S$ è un rivestimento di grado k finito. Questo intero è detto grado di f.*

3. *Per ogni punto $x \in X$, $\sum_{y \in f^{-1}(x)} b_f(y) = k$.*

Una mappa che gode di queste proprietà viene detta *rivestimento ramificato*. Il teorema si parafrasa dicendo che una mappa olomorfa tra superfici di Riemann è un rivestimento ramificato.

1.2.3 Il teorema di esistenza di Riemann

Sia X una superficie di Riemann, $p : Y \longrightarrow X$ un rivestimento; c'è una ed una sola struttura analitica su Y che rende p un'applicazione olomorfa.



Per un punto $y \in Y$ con $p(y) = x \in X$ scegliamo un intorno coordinato V_x uniformemente rivestito da p, con carta locale ψ. Sia U l'aperto connesso retroimmagine di V_x che contiene y. Ora U assurge a dignità di intorno coordinato, in quanto lo dotiamo della carta locale $\varphi = \psi \circ p : Y \longrightarrow \mathbb{C}$. La mappa φ è un omeomorfismo sulla propria immagine. Possiamo eseguire questa procedura per ogni punto di Y, e creare un insieme di mappe $\mathcal{A}$. Le applicazioni di transizione che nascono da questo insieme sono ovviamente funzioni olomorfe, poichè coincidono con le transizioni di X. $\mathcal{A}$ è quindi un atlante per Y, e p è un'applicazione ovviamente olomorfa.

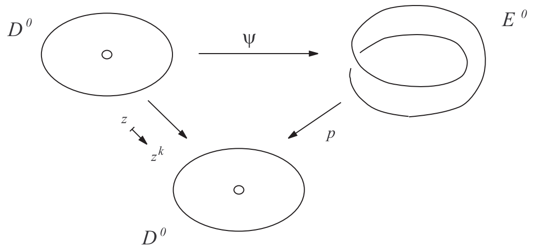
Nel paragrafo precedente abbiamo visto che ogni applicazione olomorfa (non costante) tra superfici di Riemann è un rivestimento ramificato di grado finito. Vogliamo ora in qualche modo "tornare indietro". Data una superficie di Riemann Y, un sottoinsieme finito di punti $S \subseteq Y$ ed un rivestimento di grado finito $p : Y^\circ \longrightarrow X \backslash S$, abbiamo appena mostrato che Y° eredita una struttura di superficie di Riemann tale che la mappa p sia analitica. Vogliamo ora "tappare" i buchi sopra i punti di S, immergendo Y° in una superficie di Riemann Y in modo che p estenda ad una applicazione olomorfa $f : Y \longrightarrow X$. La situazione è ben visualizzata dal seguente diagramma:

$$\begin{array}{ccc} Y^\circ & \hookrightarrow & Y \\ {\scriptstyle p}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ X \backslash S & \hookrightarrow & X \end{array}$$

Il problema è prettamente locale. Mettiamoci quindi in un punto $s \in S$ e prendiamo un pezzettino di superficie di Riemann che identificheremo con un disco (di cui s è l'origine). Denotiamo con D tale disco e con $D^\circ = D \setminus \{\ 0\ \}$ il disco bucato. Noi sappiamo tutto dei rivestimenti di D°. Poichè infatti il suo gruppo fondamentale è $\mathbb{Z}$, i rivestimenti di grado finito di D° corrispondono ai sottogruppi di indice finito di $\mathbb{Z}$, cioè ai gruppi $k\mathbb{Z}$ per un qualche intero positivo k. Il rivestimento associato a questo sottogruppo è

$$p_k : \begin{array}{ccc} D^\circ & \longrightarrow & D^\circ \\ z & \longmapsto & z^k \end{array}$$

Quindi se $p : E^\circ (= p^{-1}(D^\circ)) \longrightarrow D^\circ$ è un qualsiasi rivestimento connesso di grado k, esiste un omeomorfismo $\psi : D^\circ \longrightarrow E^\circ$ tale che $p \circ \psi = p_k$.



E' ora chiaro come possiamo "tappare il buco" di E°. Definiamo $E = E^\circ \cup\ \{e\}$, dove e è un nuovo punto, e mettiamo una struttura analitica su E in modo che l'estensione di ψ da D° a D, che porta lo 0 nel punto e sia un isomorfismo tra D ed E. Queste sono le istruzioni per tappare un singolo buco. Ora si tratta semplicemente di ripetere questo procedimento per tutti i punti di S. Otteniamo infine uno spazio Y, unione di Y° con un numero finito di nuovi punti, e delle nuove carte locali, compatibili con la struttura di Y°, definite su intorni coordinati centrati in questi nuovi punti. In questo modo Y ha una struttura analitica che rende la mappa f ovviamente olomorfa.

Abbiamo testè dimostrato un teorema assai importante nella teoria delle superfici di Riemann, che ora enunceremo in maniera formale.

Teorema 7 (di esistenza di Riemann). *Sia X una superficie di Riemann, S un sottoinsieme finito di X e $p : Y^\circ \longrightarrow X \setminus S$ un rivestimento connesso di* *grado finito. Allora esiste un embedding di Y° in un aperto di una superficie di Riemann Y, ottenibile come unione di Y° ed un insieme finito di punti, tale che p estende ad una mappa olomorfa da Y in X.*

1.2.4 Un caso particolare

Abbiamo visto come i rivestimenti ed i morfismi di superfici di Riemann siano strettamente legati tra di loro. Vorremmo adesso evidenziare queste interconnessioni in un caso molto particolare, che per i nostri scopi rivestirà cruciale importanza.

Denotiamo con π il gruppo fondamentale di $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \setminus \{0, 1, \infty\}$, ossia della sfera di Riemann bucata in tre punti. Esso è generato dai tre cappi l_0, l_1, l_∞ (che girano attorno rispettivamente a 0, 1, ∞) con la relazione $l_0 l_1 l_\infty = \mathbb{1}$.

Proposizione 1. *V'è una bijezione tra le classi di conjugio di sottogruppi di indice finito di π e le classi di equivalenza di rivestimenti di grado finito di $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ ramificati solo sopra 0, 1 e ∞.*

Dimostrazione. Data una classe di conjugio di sottogruppi di indice finito di π, ad essa è univocamente associato un rivestimento di grado finito di $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \setminus \{0, 1, \infty\}$. Il teorema di esistenza di Riemann permette di estendere univocamente questa applicazione ad un rivestimento ramificato di $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$. I punti di ramificazione dovranno stare per forza sopra 0, 1, o ∞. Viceversa, dato un rivestimento p di $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ ramificato sopra 0, 1, ∞, consideriamo la restrizione $p_{|p^{-1}(\mathbb{P}^1(\mathbb{C})\setminus\{0,1,\infty\})}$. Essa è un rivestimento non ramificato di $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \setminus \{0, 1, \infty\}$ e ad essa è quindi naturalmente associata una classe di conjugio di sottogruppi di π.

Definiamo $\pi' := \pi / \langle l_1^2 \rangle$. Segue immediatamente questo:

Corollario 1. *V'è una bijezione tra le classi di conjugio di sottogruppi di indice finito di π' e le classi di equivalenza di rivestimenti di grado finito di $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ ramificati solo sopra 0, 1 e ∞, tali che l'ordine di ramificazione sopra 1 è al più 2.*

1.3 Forme differenziali

Vogliamo ora presentare, in maniera assai veloce e necessariamente incompleta, quei pochi ma basilari capisaldi della teoria delle forme differenziali olomorfe ed armoniche che ci serviranno successivamente.
Supponiamo che il lettore abbia già confidenza con i concetti di forma differenziale, prodotto esterno, con gli operatori d, ∂ e $\bar{\partial}$ di differenziazione.
Utilizzeremo la seguente simbologia standard:

- $\mathcal{E}^i$: fascio dei germi delle i-forme differenziali;
- $\mathcal{E}^{i,j}$: fascio dei germi delle forme differenziali di tipo (i, j);
- $\mathbb{C}$: fascio dei germi delle funzioni costanti;
- $\mathcal{O}$: fascio dei germi delle funzioni olomorfe.

La trattazione delle forme differenziali olomorfe è presa principalmente da [C] e liberamente rielaborata. Abbastanza fedele alla linea seguita da [F] è invece il paragrafo dedicato ai differenziali armonici.

1.3.1 Differenziali abeliani

Sia X una superficie di Riemann di genere g. Un *differenziale abeliano* (o *forma differenziale olomorfa*) ω su X è una forma di tipo (1,0) tale che $\bar{\partial}\omega = 0$. Ciò vuol dire che per ogni punto $x \in X$, ω ammette un' espressione locale del tipo

$$\omega = f(z)\ dz,$$

con f una funzione olomorfa.
Denotiamo con $\Omega(X) \subseteq \mathcal{E}^{1,0}(X)$ il $\mathbb{C}$-spazio vettoriale delle forme differenziali olomorfe globali su X. Con Ω indichiamo il fascio dei germi delle forme differenziali olomorfe.

Una presentazione più raffinata, che però abbisogna di un po' più di cultura, definisce i differenziali abeliani come le sezioni olomorfe globali del fibrato canonico K_X della superficie di Riemann X.
Supponiamo questa "quantità" di cultura, nonchè il potentissimo *teorema di Serre*, noti per dimostrare in maniera veloce ed elegante il prossimo risultato.

Proposizione 2. $\dim_{\mathbb{C}} \Omega(X) = g$.

Dimostrazione. Consideriamo la successione esatta

$$0 \longrightarrow \mathbb{C} \hookrightarrow \mathcal{O}_X \xrightarrow{d} \Omega_X \longrightarrow 0$$

L'esattezza in $\mathbb{C}$ ed in $\mathcal{O}_X$ è palese, la surjettività di d dipende dal fatto che ogni forma differenziale olomorfa è localmente esprimibile come "(serie di potenze)dz", e la serie di potenze è integrabile membro a membro. Così facendo si trova una primitiva locale.
In coomologia tale successione induce:

$$0 \longrightarrow H^0(\mathbb{C}) \longrightarrow H^0(\mathcal{O}_X) \longrightarrow H^0(\Omega_X) \longrightarrow H^1(\mathbb{C}) \longrightarrow$$
$$\longrightarrow H^1(\mathcal{O}_X) \longrightarrow H^1(\Omega_X) \longrightarrow H^2(\mathbb{C}) \longrightarrow H^2(\mathcal{O}_X)\ (= 0)$$

Si tratta ora di capire chi sono i vari personaggi:

- $H^0(\mathbb{C}) = \mathbb{C}(X) = \mathbb{C}$ sono le funzioni costanti;
- $H^0(\mathcal{O}_X) = \mathbb{C}$ sono le funzioni olomorfe globali, che corrispondono ancora alle sole costanti;
- $H^0(\Omega_X) = \Omega(X)$ è lo spazio dei differenziali abeliani;
- $H^1(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^{2g}$ il primo gruppo di coomologia singolare a coefficienti complessi;
- $H^1(\mathcal{O}_X)$ per il teorema di dualità di Serre è uguale al duale di $H^0(\Omega_X)$. In particolare questi due spazi hanno la stessa dimensione;
- $H^1(\Omega_X)$ analogamente è uguale a $H^0(\mathcal{O}_X)^*$;
- $H^2(\mathbb{C}) = \mathbb{C}$ in quanto X è una superficie topologica compatta ed orientabile.

Ricordiamo ora che la somma a segni alterni delle dimensioni di questi spazi deve annullarsi. Effettuando il conto si ottiene la tesi.

Definiamo una forma differenziale $\nu \in \mathcal{E}^1(X)$ *antiolomorfa* se $\nu \in \mathcal{E}^{0,1}$ e $\partial\nu = 0$. La forma ν è antiolomorfa se e solo se $\bar{\nu}$ è olomorfa. Denotiamo con $\bar{\Omega}$ il fascio dei germi delle forme differenziali antiolomorfe. Poichè il conjugio induce un $\mathbb{R}$-isomorfismo di spazi vettoriali tra $\Omega(X)$ ed $\bar{\Omega}(X)$,

$$\dim_{\mathbb{C}} \bar{\Omega}(X) = g.$$

1.3.2 Forme armoniche

L'operatore $\star$ di Hodge

Ogni 1-forma $\omega \in \mathcal{E}^1(X)$ può essere decomposta in un unico modo come

$$\omega = \omega_1 + \omega_2 \qquad \text{con } \omega_1 \in \mathcal{E}^{1,0}(X),\ \omega_2 \in \mathcal{E}^{0,1}(X).$$

Definiamo

$$\star\omega := i(\bar{\omega}_1 - \bar{\omega}_2).$$

L'operatore $\star : \mathcal{E}^1(X) \longrightarrow \mathcal{E}^1(X)$ è un isomorfismo di $\mathbb{R}$-spazi vettoriali che mappa $\mathcal{E}^{1,0}(X)$ in $\mathcal{E}^{0,1}(X)$ e viceversa.
Per $\omega \in \mathcal{E}^1(X)$, $\omega_1 \in \mathcal{E}^{1,0}(X)$, $\omega_2 \in \mathcal{E}^{0,1}(X)$ ed $f \in \mathcal{E}^0(X)$ sono verificate le seguenti proprietà:

- $\star\star\,\omega = -\omega, \qquad \overline{\star\omega} = \star\bar{\omega};$
- $d\star(\omega_1 + \omega_2) = i\partial\bar{\omega}_1 - i\bar{\partial}\bar{\omega}_2;$

- $\star\partial f = i\bar{\partial}\bar{f}, \qquad\qquad \star\bar{\partial} f = -i\partial\bar{f};$
- $d\star df = 2i\partial\bar{\partial}\bar{f}.$

Una 1-forma $\omega \in \mathcal{E}^1(X)$ si dice *armonica* se vale una delle seguenti proprietà equivalenti:

- $d\omega = d\star\omega = 0;$
- $\partial\omega = \bar{\partial}\omega = 0;$
- $\omega = \omega_1 + \omega_2,\ con\ \omega_1 \in \Omega(X)\ ed\ \omega_2 \in \bar{\Omega}(X);$
- *dato un punto* $a \in X$ *esiste un intorno* U *di* a *ed una funzione armonica* f *su* U *tale che* $\omega = df.$

L'equivalenza di queste proprietà segue facilmente dalle proprietà dell' operatore $\star$ prima enunciate.
Lo spazio vettoriale delle 1-forme armoniche sulla superficie di Riemann X sarà denotato con $Harm(X)$. Vediamo immediatamente che

$$Harm(X) = \Omega(X) \oplus \bar{\Omega}(X).$$

Quindi se X è una superficie di Riemann di genere g

$$\dim_{\mathbb{C}} Harm(X) = 2g.$$

Prodotto scalare in $\mathcal{E}^1(X)$

Siano $\omega_1, \omega_2 \in \mathcal{E}^1(X)$. Definiamo

$$(\omega_1, \omega_2) := \int_X \omega_1 \wedge \star\omega_2.$$

Abbiamo testè definito una mappa sesquilineare

$$(\ ,\ ) : \mathcal{E}^1(X) \times \mathcal{E}^1(X) \longrightarrow \mathbb{C}.$$

Vogliamo ora mostrare che essa è anche definita positiva, cioè che abbiamo dotato $\mathcal{E}^1(X)$ di un prodotto interno che lo rende uno spazio unitario. Per una 1-forma $\omega \in \mathcal{E}^1(X)$ calcoliamo (ω, ω).
In una carta locale (U, z), con $z = x + iy$, ω avrà un'espressione locale del tipo

$$\omega = f\,dz + g\,d\bar{z}.$$

Allora
$$\star\omega = i(\bar{f}\, d\bar{z} - \bar{g}\, dz)$$
e
$$\omega \wedge \star\omega = i(\mid f \mid^2 + \mid g \mid^2) dz \wedge d\bar{z} = 2(\mid f \mid^2 + \mid g \mid^2) dx \wedge dy.$$
Questo calcolo mostra che $(\omega, \omega) \geq 0$ e $(\omega, \omega) = 0$ se e solo se $\omega = 0$.

Questo prodotto scalare opera una decomposizione ortogonale sullo spazio $\mathcal{E}^1(X)$.
$$\mathcal{E}^1(X) :\ \partial\mathcal{E}^0(X)\ \oplus\ Harm(X)\ \oplus\ \bar{\partial}\mathcal{E}^0(X).$$
Tenendo conto che anche $d\mathcal{E}^0(X)$ e $\star d\mathcal{E}^0(X)$ sono sottospazi ortogonali in $\mathcal{E}^1(X)$ e che $d\mathcal{E}^0(X)\ \oplus\ \star d\mathcal{E}^0(X) = \partial\mathcal{E}^0(X)\ \oplus\ \bar{\partial}\mathcal{E}^0(X)$, vale anche la seguente:
$$\mathcal{E}^1(X) = d\mathcal{E}^0(X)\ \oplus\ Harm(X)\ \oplus\ \star d\mathcal{E}^0(X).$$
Da queste decomposizioni segue che su una superficie di Riemann X ogni forma differenziale esatta ed armonica è nulla; le uniche funzioni armoniche su X sono quindi le costanti.
Ricordando che $\mathcal{E}^1(X) = \mathcal{E}^{1,0}(X)\ \oplus\ \mathcal{E}^{0,1}(X)$ (ed anche questa è una decomposizione ortogonale) possiamo anche dedurre:
$$\mathcal{E}^{0,1}(X) = \bar{\partial}\mathcal{E}^0(X)\ \oplus\ \bar{\Omega}(X)$$
$$\mathcal{E}^{1,0}(X) = \partial\mathcal{E}^0(X)\ \oplus\ \Omega(X).$$
Tutti questi risultati sono molto facili da ottenere sfruttando le proprietà dell' operatore $\star$ e la definizione di prodotto scalare. La tecnica dimostrativa è sempre la stessa. Vorrei darvene un esempio con il seguente:

Teorema 8. *Sia X una superficie di Riemann. Allora*
$$Ker(\mathcal{E}^1(X) \xrightarrow{d} \mathcal{E}^2(X)) = d\mathcal{E}^0(X)\ \oplus\ Harm(X).$$

Dimostrazione. Poichè
$$\mathcal{Z}(X) := Ker(\mathcal{E}^1(X) \xrightarrow{d} \mathcal{E}^2(X)) \supset d\mathcal{E}^0(X)\ \oplus\ Harm(X),$$
è sufficiente provare che
$$\mathcal{Z}(X) \perp \star d\mathcal{E}^0(X).$$
Siano quindi $\omega \in \mathcal{Z}(X)$ e $f \in \mathcal{E}^0(X)$. Allora
$$\omega \wedge \star(\star df) = -\omega \wedge df = d(f\omega).$$
Quindi
$$(\omega, \star df) = \int_X d(f\omega) = 0.$$
Da esso e dal teorema di De Rham segue il fondamentale

Corollario 2. $H^1(X, \mathbb{C})\ \cong\ Harm(X)$.

1.4 La Jacobiana di una Superficie di Riemann

1.4.1 La varietà di Picard

Sia X una superficie di Riemann. La successione esatta esponenziale

$$(*) \qquad 0 \longrightarrow \mathbb{Z} \hookrightarrow \mathcal{O}_X \overset{e^{2\pi i z}}{\longrightarrow} \mathcal{O}_X^* \longrightarrow 0$$

induce in coomologia

$$\cdots \longrightarrow H^1(X,\mathbb{Z}) \longrightarrow H^1(X,\mathcal{O}) \longrightarrow H^1(X,\mathcal{O}^*) = Pic(X) \overset{c}{\longrightarrow} H^2(X,\mathbb{Z}) = \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

da cui segue la successione esatta

$$0 \longrightarrow H^1(X,\mathcal{O})/H^1(X,\mathbb{Z}) \longrightarrow H^1(X,\mathcal{O}^*) \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow 0.$$

Ricordiamo che c è l'omomorfismo che associa ad un fibrato lineare la sua classe di Chern; identificando $H^1(X,\mathcal{O}^*)$ con il gruppo $Pic(X)$ delle classi di equivalenza lineare di divisori su X, c assume il significato di "omomorfismo grado", cioè associa ad ogni $D \in Pic(X), (D = \sum m_i x_i,\ m_i \in \mathbb{Z})$ il grado $degD = \sum m_i$.
Il nucleo di c è quindi il gruppo $Pic^\circ(X)$ delle classi di equivalenza lineare di divisori di grado zero.

Utilizzando ora la successione

$$(**) \qquad 0 \longrightarrow \mathbb{C} \hookrightarrow \mathcal{O}_X \overset{d}{\longrightarrow} \Omega_X \longrightarrow 0$$

giungiamo a dare la seguente caratterizzazione:

$$Pic^\circ(X) = \delta(H^0(X,\Omega))\backslash H^1(X,\mathbb{C})/H^1(X,\mathbb{Z}).$$

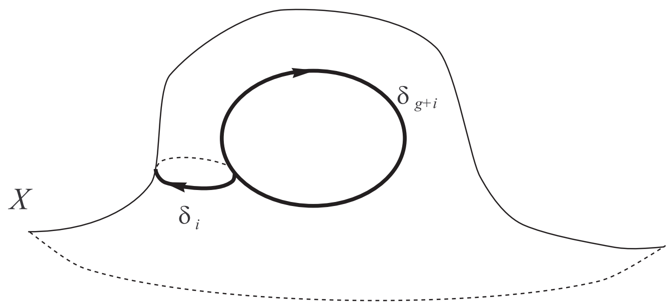
Analizzando la successione esatta lunga indotta in coomologia da $(**)$ è semplice vedere che δ è una freccia injettiva; l' immagine dello spazio dei differenziali abeliani è un sottospazio g-dimensionale di $H^1(X,\mathbb{C}) \cong \mathbb{C}^{2g}$. Riguardo al quoziente ho che

$$\delta(H^0(X,\Omega))\backslash H^1(X,\mathbb{C}) \;\cong\; \mathbb{C}^g.$$

Con un po' di lavoro (vedi per esempio [G]) si vede che $H^1(X,\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^{2g} \subseteq \delta(H^0(X,\Omega))\backslash H^1(X,\mathbb{C})$ forma un reticolo di rango massimo.
$Pic^\circ(X)$ ha quindi la struttura di un toro complesso e viene detto *varietà di Picard* di X.

1.4.2 La varietà Jacobiana

Sia X una superficie di Riemann di genere g. Denotiamo con $\delta_1, ..., \delta_{2g}$ gli 1-cicli che formano la "base canonica" di $H_1(X, Z)$. Topologicamente X è una sfera con g maniglie attaccate ed i δ_i sono i cammini meridiani attorno alle maniglie.



Con questa scelta di base notiamo che la matrice della forma di intersezione in $H_1(X, \mathbb{Z})$ assume la semplicissima forma

$$\left[\begin{array}{c|c} & I_g \\ \hline -I_g & \end{array}\right].$$

Scegliamo ora una base $\{\omega_1, ..., \omega_g\} \subseteq H^0(X, \Omega)$ per lo spazio dei differenziali abeliani. La *matrice dei periodi* di X è la matrice $g \times 2g$ così costruita:

$$P := \begin{bmatrix} \int_{\delta_1} \omega_1 & \cdots & \int_{\delta_{2g}} \omega_1 \\ \vdots & & \vdots \\ \int_{\delta_1} \omega_g & \cdots & \int_{\delta_{2g}} \omega_g \end{bmatrix}.$$

I vettori colonna di questa matrice sono detti *periodi* ed indicati con Π_i. Essi sono $\mathbb{R}$-linearmente indipendenti. Se infatti esistesse una combinazione lineare non banale $\sum k_i \Pi_i = 0, k_i \in \mathbb{R}$, allora

$$\sum k_i \int_{\delta_i} \omega_j = 0 \quad \text{e} \quad \sum k_i \int_{\delta_i} \bar{\omega}_j = 0 \qquad \forall j.$$

Quindi
$$\sum k_i[\delta_i] = 0 \in H_1(X, \mathbb{R}),$$
poichè $\{\omega_i, \bar{\omega_i}\}$ generano $H^1_{DR}(X)$. Ma questo è impossibile, perchè i δ_i formano una base di $H_1(X, \mathbb{R})$.
I periodi Π_i generano quindi un reticolo Λ di rango massimo $2g$. Definiamo quindi la *varietà Jacobiana* $\mathcal{J}(X)$ come il toro complesso $\mathbb{C}^g/\Lambda$.
La Jacobiana si può definire equivalentemente, in modo forse più elegante ma anche più astratto, come:
$$\mathcal{J}(X) := \{H^0(X, \Omega)\}^* / j(H_1(X, \mathbb{Z})),$$
laddove
$$\begin{array}{rccc} j: & H_1(X,\mathbb{Z}) & \longrightarrow & \{H^0(X,\Omega)\}^* \\ & [\gamma] & \longmapsto & j(\omega): \omega \mapsto \int_\gamma \omega. \end{array}$$
Abbiamo tuttavia preferito la costruzione più concreta di [G-H] e continueremo a seguire questa linea.

1.4.3 La mappa di Abel

Sia x_0 un punto di X. Per $\omega \in \Omega(X)$, l'integrale
$$\int_{x_0}^{x} \omega$$
non è ben definito; esso può variare a seconda del cammino scelto per congiungere x_0 con x. Tuttavia, poichè integrare lungo cammini omologhi dà lo stesso risultato, questo integrale è ben definito modulo i propri $2g$ *periodi*
$$\int_{\delta_1} \omega, \cdots, \int_{\delta_{2g}} \omega.$$
Quindi il vettore
$$(\int_{x_0}^{x} \omega_1, \cdots, \int_{x_0}^{x} \omega_g)$$
è un ben definito punto di $\mathcal{J}(X)$. Nasce quindi naturalmente la mappa
$$\begin{array}{rccc} \mu: & X & \longrightarrow & \mathcal{J}(X) \\ & x & \longmapsto & (\int_{x_0}^{x} \omega_1, \cdots, \int_{x_0}^{x} \omega_g), \end{array}$$

detta *mappa di Abel.* Chiameremo mappa di Abel anche un'altra funzione con questa strettamente imparentata. Denotato con $Div^\circ(X)$ il gruppo dei divisori di grado zero su X,

$$\begin{array}{rccc} \mu: & Div^\circ(X) & \longrightarrow & \mathcal{J}(X) \\ & \sum(x_\lambda - y_\lambda) & \longmapsto & (\int_{x_\lambda}^{y_\lambda}\omega_1, \cdots, \int_{x_\lambda}^{y_\lambda}\omega_g). \end{array}$$

1.4.4 Le relazioni bilineari di Riemann

Il classico [G-H] utilizza una costruzione elementare e molto geometrica per ricavare queste importanti relazioni. Qui delineerò molto essenzialmente la linea di questa costruzione. Sia X sempre la nostra superficie di Riemann, ω un differenziale abeliano su X, η una 1-forma meromorfa le cui uniche singolarità siano poli semplici in certi punti $x_\lambda \in X$. Assumiamo che η non abbia poli sui cammini $\delta_1, \cdots, \delta_{2g}$ (possiamo sempre ottenere ciò a meno di deformare leggermente tali cammini). Denotiamo con Π_i e N_i i periodi, rispettivamente, di ω e η lungo il cammino δ_i. Denotiamo infine con $\Delta \subseteq X$ la regione semplicemente connessa ottenuta tagliando X lungo i cammini δ_i:

$$\Delta \;=\; X \setminus \bigcup\{\delta_i\}.$$

Il primo passo consiste nel ricavare la seguente relazione, detta *prima legge di reciprocità*:

$$\sum_{i=1}^{g}(\Pi_i N_{g+i} - \Pi_{g+i}N_i) = 2\pi\sqrt{-1}\sum_\lambda Res_{s_\lambda}(\eta\int_{s_0}^{s_\lambda}\omega).$$

Il punto s_0 è arbitrariamente scelto all'interno di Δ, gli integrali sono effettuati anch'essi all' interno di Δ.

Quindi si dimostra con tecnica analoga che un differenziale abeliano ω i cui primi g periodi si annullano è identicamente nullo, cioè che il primo minore $g \times g$ della matrice dei periodi è non singolare. Possiamo allora scegliere una opportuna base $\omega_1, \cdots, \omega_g$ per $H^0(X, \Omega)$ tale che

$$P = [\ I_g \mid Z\ ].$$

Una tale base per $H^0(X, \Omega)$ si dice *normalizzata.*

Seguono ora immediatamente le *relazioni bilineari di Riemann.* Per ottenere la *Prima relazione di Riemann* basta considerare il caso particolare in cui $\eta = \omega' \in H^0(X, \Omega)$. Detti Π_i' i periodi di ω', la legge di reciprocità si rilegge

$$\sum_{i=1}^{g}(\Pi_i\Pi'_{g+i} - \Pi_{g+i}\Pi'_i) = 0.$$

Se poi scegliamo $\omega = \omega_i$, $\omega' = \omega_j$ elementi della base normalizzata, gli unici termini che sopravvivono nella precedente espressione sono

$$\int_{\delta_{g+i}} \omega_j - \int_{\delta_{g+j}} \omega_i = 0.$$

Cioè la matrice Z sopra definita è simmetrica. Ora osserviamo che la forma quadratica associata a

$$(\omega_i, \omega_j) = \sqrt{-1} \int_X \omega_i \wedge \bar{\omega}_j$$

è definita positiva. Si può dimostrare che

$$(\omega_i, \omega_j) = \sqrt{-1}\overline{\int_{\delta_{g+i}} \omega_j} - \sqrt{-1} \int_{\delta_{g+j}} \omega_i = 2 \; Im \int_{\delta_{g+i}} \omega_j.$$

E' quindi definita positiva la parte immaginaria della matrice Z. Queste sono le *Seconde relazioni di Riemann.*

1.4.5 Il Teorema di Abel

Il teorema di Abel è uno dei risultati fondamentali nella teoria delle superfici di Riemann. E' talmente importante che in letteratura assume diverse forme tra loro equivalenti (o quasi). Piuttosto che dimostrarlo, cosa fatta egregiamente in tanti libri (uno per tutti il solito [G-H]), vogliamo ora enunciarlo in due forme quasi equivalenti e discuterne un po'.

Teorema di Abel 1 (come in "Griffiths-Harris"). *Siano X una superficie di Riemann, $\omega_1, \cdots, \omega_g$ una base per lo spazio dei differenziali abeliani. Un divisore $D = \sum(x_\lambda - y_\lambda) \in Div^\circ(X)$ è principale, cioè $D = (f)$ per una qualche funzione meromorfa f, se e solo se*

$$\mu(D) = (\sum_\lambda \int_{y_\lambda}^{x_\lambda} \omega_1, \cdots, \sum_\lambda \int_{y_\lambda}^{x_\lambda} \omega_g) = 0 \in \mathcal{J}(X).$$

Questa presentazione è estremamente classica. Con un linguaggio leggermente più tecnologico abbiamo

Teorema di Abel 2 (come in "Cornalba"). *E' possibile definire una mappa di Abel*

$$\mu : \; Pic^\circ(X) \longrightarrow \mathcal{J}(X).$$

Questa mappa è un isomorfismo di tori complessi.

Questa seconda versione è leggermente più forte della prima. La direzione $\Rightarrow$ del teorema 1 implica che la mappa di Abel precedentemente definita su $Div^\circ(X)$ in realtà fattorizza su $Pic^\circ(X)$. Infatti

$$\mu(D + (f)) = \mu(D) + \mu((f)) = \mu(D).$$

La direzione $\Leftarrow$ invece garantisce l'injettività dei questa mappa:

$$\mu(D_1) = \mu(D_2) \Rightarrow \mu(D_1 - D_2) = 0 \Rightarrow D_1 - D_2 = (f).$$

Non è contenuta nella prima versione del teorema di Abel la surjettività di questa freccia. Nella letteratura classica questo si chiama il problema di *inversione di Jacobi*.

Ad ogni superficie di Riemann possiamo quindi associare naturalmente una varietà abeliana $\mathcal{J}(X) \cong Pic^\circ(X)$. Ciò che rende particolarmente interessante questa costruzione è che possiamo in verità anche "tornare indietro". Il *teorema di Torelli* garantisce che se abbiamo due superfici di Riemann X ed X' le cui Jacobiane $\mathcal{J}(X)$, $\mathcal{J}(X')$ sono isomorfe come varietà abeliane polarizzate, allora anche $X \cong X'$.

Capitolo 2

Dessins d'enfants

Questo capitolo è dedicato alla presentazione della teoria dei *dessins d'enfants*. Essi sono fondamentalmente degli scarabocchi su una superficie topologica compatta. E' stato Grothendieck, nel suo *Esquisse d'un Programme*, a coniare questo nome ed a conferire dignità di teoria matematica a questi enti elementari, intuendo come essi possano servire a descrivere enti assai più complicati e matematicamente interessanti. In un certo senso i dessins sono utilizzati da Grothendieck come una chiave capace di aprire porte blindate che nascondono luoghi totalmente ignoti. Dice Grothendieck:

> *"Je ne crois pas qu'un fait mathématique m'ait jamais autant frappé que celui-là, et ait eu un impact psychologique comparable. Cela tient surement à la nature tellement familière, non technique, des objets considérés, dont tout dessin d'enfant griffonné sur un bout de papier (pour peu que le graphisme soit d'un seul tenant) donne un exemple parfaitement explicite. A un tel dessin se trouvent associés des invariants arithmétiques subtils, qui seront chamboulés complètement dès qu'on y rajoute un trait de plus."*

Noi presentiamo qui i fondamenti di questa teoria seguendo principalmente il filo logico utilizzato da Leila Schneps in [S], aggiungendo qualcosina tratto da [SV1] e cercando di rendere la trattazione più esplicita possibile. A tale scopo abbiamo "espanso", a costo di essere noiosi, le dimostrazioni e aggiunto diversi esempi.

2.1 Definizioni fondamentali

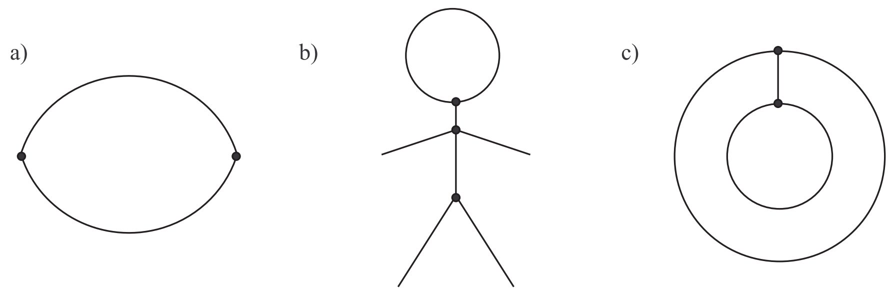
Un *dessin d'enfant* (o più semplicemente un *disegno*) D è una terna $X_0 \subseteq X_1 \subseteq X_2$ con le seguenti caratteristiche:

- X_2 è una superficie topologica, compatta, orientabile;
- X_0 è un insieme finito di punti;
- $X_1 \setminus X_0$ è un insieme finito di 1-celle aperte a due a due disgiunte;
- $X_2 \setminus X_1$ è un insieme finito di 2-celle aperte a due a due disgiunte.

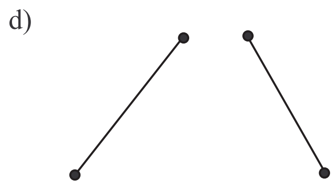
Un punto $x \in X_0$ si dice *vertice* del disegno. X_0 si chiama *insieme dei vertici*.
Una 1-cella $v \in X_1 \setminus X_0$ si dice *lato* del disegno. Denoteremo con S_1 l' *insieme dei lati*.
Una 2-cella $U \in X_2 \setminus X_1$ si dice *componente* del disegno. L'*insieme delle componenti* è denotato con S_2.
Per essere consistenti con queste notazioni indicheremo l'insieme dei vertici anche con S_0. L'introduzione dei simboli S_i può sembrare a prima vista ridondante. In verità v'è una sottile distinzione concettuale tra X_0, $X_1 \setminus X_0$, $X_2 \setminus X_1$ e S_0, S_1, S_2. Mentre i primi sono dei dati tolopogici, costituiti da infiniti punti appartenenti ad una superficie topologica compatta, i secondi sono insiemi finiti i cui elementi sono dei sottoinsiemi opportunamente definiti di X_0, $X_1 \setminus X_0$, $X_2 \setminus X_1$.

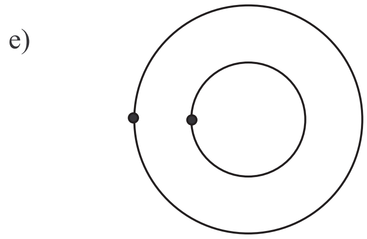
Quando il contesto non genera confusione, indicheremo con D solamente X_1, cioè il grafo vero e proprio.

Ecco alcuni esempi di dessins su S^2, laddove immaginiamo la sfera projettata stereograficamente sul piano:



ed alcuni esempi di non-dessin:





Due disegni $D = X_0 \subseteq X_1 \subseteq X_2$ e $D' = X_0' \subseteq X_1' \subseteq X_2'$ sono *isomorfi* se esiste un omeomorfismo da X_2 in X_2' che induce un omeomorfismo da X_1 in X_1' ed una corrispondenza biunivoca tra X_0 ed X_0'. Con *disegno astratto* indicheremo una classe di isomorfismi di dessins.

La *valenza di un vertice* $x \in S_0$ è il numero di lati la cui chiusura contiene x; nel computare la valenza bisogna anche tenere conto di una sorta di "molteplicità": se un lato v ha una sola estremità in x, allora contribuisce 1 alla valenza di x; se invece v si richiude a formare un cappio ed ha entrambi gli estremi in x, allora contribuisce 2. La valenza di un vertice è un concetto prettamente *locale*.

La *valenza di una componente* $U \in S_2$ conta invece il numero di lati adiacenti ad U, cioè il numero di 1-celle $v \in S_1$ tali che $v \subseteq \overline{U}$. Anche in questo caso bisogna prestare un po' di attenzione nel conteggiare i contributi dei lati. Un lato che "vede" U sia alla propria destra che alla propria sinistra conta naturalmente per due.

Abbiamo quindi definito due funzioni, val_0 e val_2, con

$$val_i : S_i \longrightarrow \mathbb{N}$$

che descrivono proprietà combinatorie del disegno.
Un disegno è detto *triangolare* se val_2 è costante ed uguale a tre. I disegni triangolari (con l' aggiunta di qualche ipotesi di regolarità) definiscono le triangolazioni di una superficie topologica.
Un disegno si dice *bilanciato* quando sia val_0 che val_2 sono funzioni costanti.

Riguardando i nostri esempi precedenti:

- a) è un disegno bilanciato con $val_0 = val_2 \equiv 2$;
- b) ha due vertici con valenza 3 (il mento ed il cavallo dei pantaloni) e l'ultimo con valenza 4. Per quanto riguarda val_2 la testa ha valenza 1 mentre il "mondo" attorno all'omino ha valenza 13;

- in c) val_0 è costante; su entrambi gli estremi del ponte levatoio vale 3. val_2 assume 2 valori: 1 per il castello e per il mondo esterno, 4 per il fossato (notate che il ponte levatoio conta 2).

Un concetto che per i nostri scopi rivestirà particolare importanza è quello di *disegno pulito*. In parole povere un disegno pulito ha un vertice ad ogni estremità di ogni lato. Detto in modo un po' più formale, per ogni $v \in S_1$ deve accadere che $\overline{v} \backslash v \in S_0$.

Nei nostri esempi, a) e c) sono disegni puliti, mentre b) non lo è. Se volessimo renderlo tale, dovremmo aggiungere dei vertici in corrispondenza alle mani ed ai piedi del nostro omino. Questa operazione apparentemente irrilevante in verità per noi altera in maniera assai profonda la natura del disegno e le informazioni che esso contiene!

2.2 Il disegno duale

Ad ogni disegno D è possibile associare, in maniera naturale, un *disegno duale* D^*. Esso è costruito nel seguente modo. Per ottenere X_0^* scegliamo un punto interno ad ogni componente appartenente a $X_2 \backslash X_1$. Tale operazione realizza una bijezione naturale tra S_0^* e S_2.

$$\star^* : S_0^* \overset{\longrightarrow}{\longleftarrow} S_2 : \star$$

Ora prendiamo un vertice $x^* \in S_0^*$, e sia $U = \star^*(x^*)$ la componente di D contenente x^*.
Consideriamo tutti i lati del disegno D adiacenti ad U e distinguiamo quelli con due vertici (eventualmente coincidenti) alle estremità da quelli con un'estremità libera. Chiamiamo i primi *lati chiusi* ed i secondi *lati aperti*.
Per ogni lato aperto tracciamo una linea che congiunga x^* alla estremità libera del lato aperto.
Per ogni lato chiuso tracciamo una linea che parta da x^*, attraversi il lato nel suo baricentro, quindi raggiunga l'unico vertice duale raggiungibile senza più intersecare il disegno (eventualmente tornando ad x^* se il lato in questione borda U sia a destra che a sinistra).
Ripetendo in maniera non ridondante questa procedura per ogni vertice di S_0^* otteniamo il disegno duale D^*. Da questa costruzione nascono le altre bijezioni naturali, che indicheremo sempre con $\star$ e $\star^*$:

$$\star^* : S_1^* \overset{\longrightarrow}{\longleftarrow} S_1 : \star$$

$$\star^* : S_2^* \overset{\longrightarrow}{\longleftarrow} S_0 : \star$$

Osserviamo infine che valgono le seguenti relazioni,

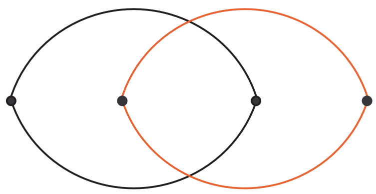
$$val_2^* \circ \star = val_0$$

$$val_0^* \circ \star = val_2$$

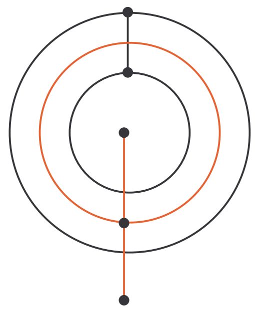
che traducono semplicemente il fatto che la valenza di un vertice è uguale alla valenza della componente duale associata a tale vertice e viceversa, la valenza di una componente è uguale alla valenza del vertice duale associato a tale componente.

Ecco come appaiono i disegni duali associati ai nostri esempi a) e c):

a)



c)



a) è, in qualche modo, un disegno autoduale. Notiamo invece che il disegno duale di c) è (anche se non lo sembra affatto) un disegno triangolare. Suggerisco come facile esercizio per verificare la comprensione di questi primi concetti, di provare a disegnare il duale dell' esempio b). Se poi proverete ad aggiungere all'omino "mani e piedi", rendendo il disegno pulito, potrete osservare subito quanto radicalmente cambia il disegno duale.

2.3 Strutture algebriche associate ai dessins

2.3.1 Il marking

Un *marking* su un disegno è un insieme di punti $\mathcal{M} = \{x_1, ..., x_l, y_1, ..., y_m, z_1, ..., z_n\}$, ottenuti in questo modo:

- gli x_i sono i vertici del nostro disegno;
- per ogni lato del disegno scegliamo un punto y_j appartenente a tale lato;
- per ogni componente del disegno scegliamo un punto z_k interno a tale componente.

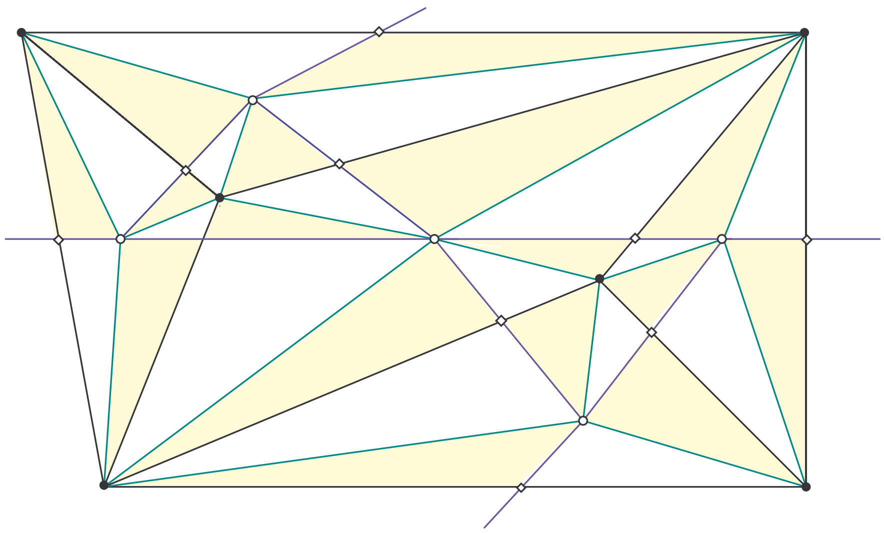
Utilizzando la costruzione appena effettuata per realizzare il disegno duale, possiamo definire il *marking canonico* del disegno, come $\mathcal{M}_c = \{X_0 \cup (\overline{X_1} \cap \overline{X_1^*}) \cup X_0^*\}$. [1]
Per motivi che diventeranno lampanti in seguito, vogliamo assegnare simboli diversi ai tre tipi di punti. Denoteremo con $\bullet$ gli x_i, con $\diamond$ gli y_i, con $\circ$ gli z_i.

2.3.2 Le bandiere

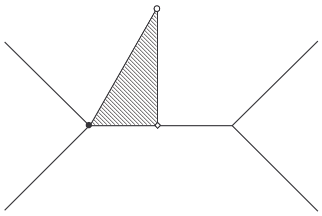
Sia D un disegno, D^* il suo disegno duale, $\mathcal{M}_c$ il marking canonico. Con $\tilde{\mathrm{D}}$ indicheremo il grafo ottenuto nel seguente modo: per ogni componente connessa $\Gamma \in X \underline{\setminus\ (D} \cup D^*)$ congiungiamo ogni vertice $z_i \in X_0^* \cap \bar{\Gamma}$ con i vertici $x_j \in X_0 \cap \star^*(z_i)$. In parole povere, congiungiamo vertici e vertici duali in tutti i modi possibili senza però intersecare ulteriormente nè D nè D^*.
$D \cup D^* \cup \tilde{D}$ realizza una partizione di X_2 in una serie di triangolini elementari con i vertici di tipo $\bullet$, $\diamond$, $\circ$.
Tali triangolini si chiamano *bandiere* e denotiamo con $\mathcal{F}(D)$ (dall'inglese "flag set") l' *insieme delle bandiere* associate a D.
A sua volta $\mathcal{F}(D)$ si suddivide, utilizzando l'orientazione, in due sottonisiemi. Denotiamo con $\mathcal{F}^+(D)$ l'insieme delle bandiere tali che l'ordine dei vertici, letti in senso antiorario, è $\circ$ - $\bullet$ - $\diamond$.
$\mathcal{F}^+(D)$ si chiama *insieme delle bandiere positive.* Similmente denoteremo con $\mathcal{F}^-$(D) l'insieme delle restanti bandiere (*bandiere negative*).

La seguente figura rappresenta una parte di un dessin. In blu è rappresentato D^* ed in verde $\tilde{D}$. E' evidenziato il marking canonico e sono ombreggiate le bandiere positive.

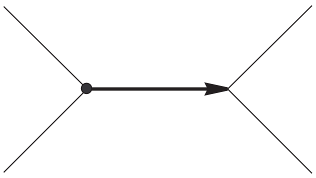
[1] C'è in verità una piccolissima incoerenza in quanto abbiamo detto. Infatti i punti di $\overline{X_1} \cap \overline{X_1^*}$ possono anche non appartenere ai lati del disegno. Ciò accade esattamente per quei lati che abbiamo definito aperti. Tuttavia questo non porta ad alcun problema nella nostra trattazione, anzi, in futuro ci permetterà di attribuire al marking canonico una rappresentazione molto elegante e naturale. Abbiate pazienza per un po', vedrete che ci assolverete.



Osserviamo che per individuare una bandiera positiva è sufficiente dare solo due dei tre vertici. In particolare sembra comoda la notazione che individua le bandiere positive mediante una freccia giacente su un lato del disegno. La base della freccia indica il vertice $\bullet$, il lato su cui giace la freccia contiene il vertice $\diamond$.
La bandiera



viene indicata con



Questa notazione rende totalmente indipendente $\mathcal{F}^+(D)$ dalla scelta di un particolare marking sul disegno.

2.3.3 Il gruppo cartografico

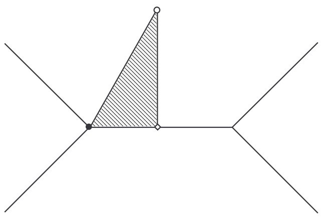
Il *gruppo cartografico* $\mathcal{C}_2$ è definito da tre generatori σ_0, σ_1, σ_2 e dalle relazioni

$$\sigma_0^2 = \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = 1 \qquad \text{e} \qquad (\sigma_0\sigma_2)^2 = 1.$$

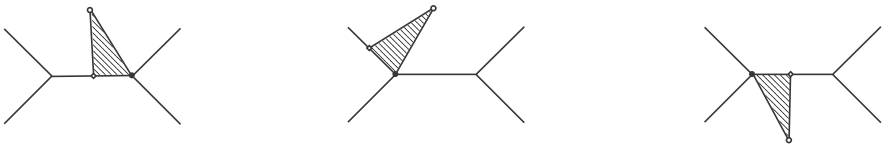
Il *gruppo cartografico orientato* $\mathcal{C}_2^+$ è il sottogruppo di indice due di $\mathcal{C}_2$ costituito da tutte e sole le parole di un numero pari di lettere.
Un insieme di generatori per $\mathcal{C}_2^+$ è dato da $\rho_0 = \sigma_1\sigma_0$, $\rho_1 = \sigma_0\sigma_2$, $\rho_2 = \sigma_2\sigma_1$, con le relazioni

$$\rho_1^2 = 1 \qquad \text{e} \qquad \rho_0\rho_1\rho_2 = 1.$$

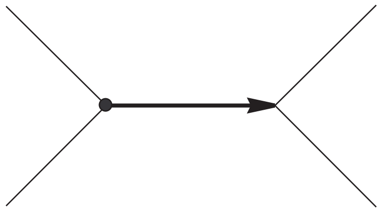
Il gruppo cartografico $\mathcal{C}_2$ agisce sull'insieme delle bandiere. Definiamo questa azione sui generatori di $\mathcal{C}_2$.
Associamo a σ_0 i vertici di tipo $\bullet$, a σ_1 i $\diamond$ ed a σ_2 i $\circ$. Ora, data una bandiera F $\in \mathcal{F}(D)$, σ_i(F) è la bandiera F' ottenuta tenendo fissi i due vertici "opposti" e scambiando nell'unico modo possibile il vertice associato a σ_i.
Se F è rappresentata da



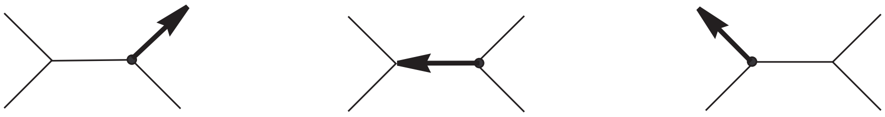
σ_0(F), σ_1(F), σ_2(F) sono, rispettivamente:



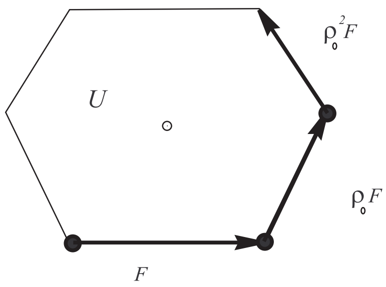
Osserviamo che l'azione di un generatore σ_i su una bandiera F $\in \mathcal{C}_2^+$ produce una bandiera F' $\in \mathcal{F}^-(D)$, e viceversa. E' quindi naturalmente definita anche un'azione del gruppo cartografico orientato $\mathcal{C}_2^+$ sull'insieme delle bandiere positive. Tale azione è rappresentata dal seguente disegno.
Se F $\in \mathcal{F}^+(D)$ è



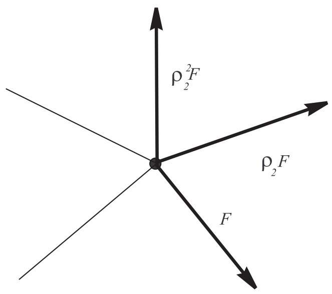
allora ρ_0(F), ρ_1(F), ρ_2(F) sono, rispettivamente



Si può descrivere l'azione di ρ_0, ρ_1, ρ_2 anche a parole. E' un po' laborioso, ma forse è utile per acquisire una certa intuizione sul funzionamento di questa azione. Il più semplice è ρ_1, che cambia il verso della freccia lasciandola giacere sullo stesso lato.
Per capire ρ_0 consideriamo la componente U associata al vertice $\circ$ di F ed i lati che bordano U. L'azione di ρ_0 fa ciclare la freccia attorno al bordo di U.



Per ρ_2 dobbiamo invece concentrarci sul vertice $\bullet$ di F e sui lati che da esso dipartono. ρ_2 mantiene fisso $\bullet$ e ruota la "lancetta" in senso antiorario al lato successivo.



2.4 I risultati

Lemma 1. *Sia D un dessin d'enfant ed $F \in \mathcal{F}^+(D)$una bandiera positiva fissata. Denotiamo con $B_{F,D}$ l'insieme degli elementi di $\mathcal{C}_2^+$ che fissano F. $B_{F,D}$ è un sottogruppo di indice finito di $\mathcal{C}_2^+$. Data un'altra bandiera F' $\in \mathcal{F}^+(D)$, $B_{F',D}$ e $B_{F,D}$ sono sottogruppi conjugati in $\mathcal{C}_2^+$.*

Dimostrazione. B$_{F,D}$ è ovviamente un sottogruppo di indice finito di $\mathcal{C}_2^+$. Poichè $\mathcal{F}(D)$ stesso è un insieme finito, l'orbita di F per l'azione di $\mathcal{C}_2^+$ è finita e quindi B$_{F,D}$ ha indice finito.
Sia ora F' $\neq$ F $\in \mathcal{F}^+(D)$. E' possibile costruire un elemento $\sigma \in \mathcal{C}_2^+$ tale che σF'= F. A questo punto è elementare verificare che B$_{F',D} = \sigma^{-1}$ B$_{F,D}$ σ.

Teorema 1 (Malgoire-Voisin). *V'è una bijezione tra le classi di isomorfismo di disegni e le classi di conjugio di sottogruppi di $\mathcal{C}_2^+$ di indice finito.*

Dimostrazione. Il lemma precedente ci mostra come associare ad un disegno una classe di conjugio di sottogruppi. Poichè l'azione di $\mathcal{C}_2^+$ su $\mathcal{F}^+(D)$ dipende unicamente dal disegno astratto, in realtà questa procedura associa una classe di conjugio di sottogruppi ad una classe di isomorfismo di disegni. Si tratta quindi ora di definire la freccia inversa. Procederemo in maniera costruttiva e mostreremo come ottenere un disegno D a partire da un sottogruppo di indice finito B $\subseteq \mathcal{C}_2^+$. Seguirà facilmente dalla nostra costruzione che il disegno non cambia se scegliamo un sottogruppo conjugato a B e che la freccia che abbiamo così definito è proprio la inversa.

Consideriamo innanzitutto B come un sottogruppo di indice finito di $\mathcal{C}_2$ e denotiamo con H $= \mathcal{C}_2$/B, lo spazio dei laterali. Vogliamo costruire un disegno D il cui insieme delle bandiere sia in bijezione con H. In questo modo anche $\mathcal{F}^+(D)$ sarà in bijezione con $\mathcal{C}_2^+$/B.
I generatori σ_0, σ_1, $\sigma_2 \in \mathcal{C}_2$ agiscono su H e dividono i suoi elementi in orbite. Per come abbiamo definito l'azione di $\mathcal{C}_2$ sui disegni è chiaro che due bandiere appartengono alla stessa σ_0-orbita se e solo se hanno il lato $\diamond$ - $\circ$ in comune, alla stessa σ_1-orbita se e solo se hanno il lato $\bullet$ - $\circ$ in comune, alla stessa σ_2-orbita se e solo se hanno il lato $\diamond$ - $\bullet$ in comune.
Possiamo quindi pensare di identificare una σ_0-orbita con un lato del tipo $\diamond$ - $\circ$, e procedere similmente con le σ_1-orbite e le σ_2-orbite.
Quindi la cardinalità dello spazio quoziente $< \sigma_0 > \setminus$ H dà il numero di lati $\diamond$ - $\circ$ nel disegno; allo stesso modo

$$|< \sigma_1 > \setminus \mathrm{H} |=| \{\text{lati} \bullet - \circ\} |$$

$$|< \sigma_2 > \setminus \mathrm{H} |=| \{\text{lati} \diamond - \bullet\} |$$

Ora consideriamo l'azione di σ_1 sullo spazio quoziente $< \sigma_0 > \setminus$ H. Se pensiamo agli elementi di $< \sigma_0 > \setminus$ H come a dei lati di tipo $\diamond$ - $\circ$, è chiaro che elementi che giacciono nella stessa σ_1-orbita corrispondono a tutti i lati che hanno in comune il medesimo vertice $\circ$.
La cardinalità dello spazio quoziente $< \sigma_0, \sigma_1 > \setminus$ H dà quindi il numero di vertici di tipo $\circ$ che compariranno nel disegno.
Similmente

$$|< \sigma_0, \sigma_2 > \backslash \mathrm{H} |=| \{\text{vertici}\diamond\} |$$

$$|< \sigma_1, \sigma_2 > \backslash \mathrm{H} |=| \{\text{vertici}\bullet\} |$$

Si tratta ora di scoprire come "disporre" i vari lati e vertici a comporre il disegno. E' un lavoro un po' simile a quello del piastrellista che segue le istruzioni sul progetto dell'architetto per creare un pavimento.
Consideriamo due vertici di tipo diverso, per esempio $\bullet$ e $\diamond$. Il vertice $\bullet$ corrisponde ad un elemento $x \in< \sigma_1, \sigma_2 > \backslash$H, mentre quello $\diamond$ ad un $y \in< \sigma_0, \sigma_2 > \backslash$H.
L'elemento x può essere considerato come una σ_1-orbita di σ_2-orbite, cioè, attraverso la nostra corrispondenza, come la stella di lati $\bullet - \diamond$ centrata nel vertice $\bullet$ individuato da x. Similmente y può essere pensato come una σ_0-orbita di σ_2-orbite, cioè come la stella di lati $\bullet - \diamond$ centrata nel vertice $\diamond$ individuato da y.
E' chiaro allora che i vertici x ed y sono contigui se e solo se hanno in comune una σ_2-orbita, che rappresenta, appunto, il lato che li congiunge.
Naturalmente la stessa procedura può essere utilizzata su tutte le possibili coppie di vertici ed in tal modo posso ricostruire interamente il disegno.

Riassumendo, abbiamo stabilito le seguenti bijezioni ed abbiamo sfruttato le projezioni naturali sui quozienti successivi di H per dedurre le informazioni geometriche necessarie ad incollare il disegno.

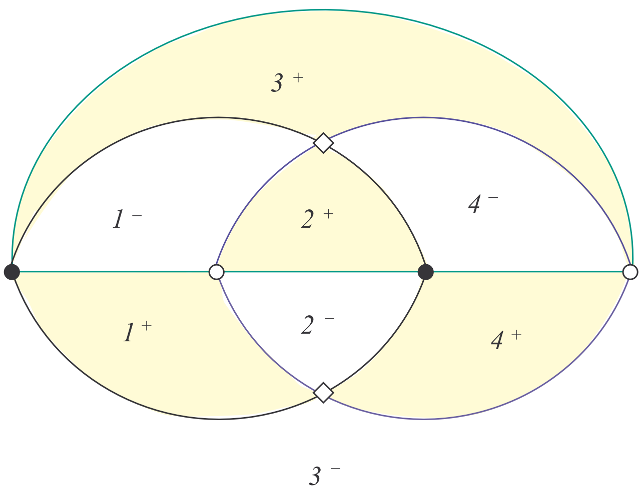
$$\begin{array}{rcl} \mathcal{F}(D) & \longleftrightarrow & \mathrm{H} = \mathcal{C}_2/\mathrm{B} \\ \{\text{lati di tipo} \diamond - \circ\ (\bullet - \circ, \bullet - \diamond)\} & \longleftrightarrow & < \sigma_0 > (< \sigma_1 >, < \sigma_2 >)\backslash \mathrm{H} \\ \{\text{vertici di tipo} \bullet (\diamond, \circ)\} & \longleftrightarrow & < \sigma_1, \sigma_2 > (< \sigma_0, \sigma_2 >, < \sigma_0, \sigma_1 >)\backslash \mathrm{H}. \end{array}$$

Bisogna ora verificare che questa costruzione sia definita a meno di conjugio, cioè che cambiando B con $\sigma^{-1}\mathrm{B}\sigma$, $\sigma \in \mathcal{C}_2^+$, si ottiene lo stesso disegno D. Ma ciò è ovvio poichè il conjugio di B non altera, dal punto di vista insiemistico (che è l'unico che abbiamo utilizzato per ricostruire il disegno), nè le strutture H, $< \sigma_i > \backslash$H, $< \sigma_i, \sigma_j > \backslash$H, nè l'azione di $\mathcal{C}_2$ su di esse.
Manca ora solo da verificare che le due frecce che abbiamo costruito sono una l'inversa dell'altra. A questo scopo consideriamo un sottogruppo di indice finito $\mathrm{B} \subseteq \mathcal{C}_2^+$. Sia D il disegno ad esso associato, F una bandiera positiva

su D e $\mathrm{B}_{F,D}$ il sottogruppo di $\mathcal{C}_2^+$ che fissa F. $\mathrm{B}_{F,D}$ è conjugato a B. Ricordiamo che $\mathcal{F}(D)$ è in bijezione con $\mathrm{H} = \mathcal{C}_2/\mathrm{B}$ e che l'azione di $\mathcal{C}_2$ su $\mathcal{F}(D)$ coincide con l'azione di $\mathcal{C}_2$ su H data semplicemente dalla moltiplicazione a sinistra. B è quindi il sottogruppo di $\mathcal{C}_2^+$ che fissa la bandiera corrispondente al laterale B. Il lemma precedente ci assicura che tutti i sottogruppi che fissano una bandiera del disegno sono tra loro conjugati e questo conclude la dimostrazione.

Esempio

Riprendiamo ora il semplicissimo esempio a) e giochiamoci un po' al fine di acquisire manualità con queste tecniche.
Iniziamo con il costruire il marking canonico sul nostro disegno:



$\mathcal{F}(D)$ è costituito dagli otto triangolini che abbiamo numerato 1^+, 1^-, 2^+, 2^-, 3^+, 3^-, 4^+, 4^-.
Abbiamo evidenziato, ombreggiandole, le bandiere positive: 1^+, 2^+, 3^+, 4^+.
L'azione di $\mathcal{C}_2$ su $\mathcal{F}(D)$è la seguente:

$$\begin{array}{lll}
\sigma_0(1^+) = 2^- & \sigma_1(1^+) = 1^- & \sigma_2(1^+) = 3^- \\
\sigma_0(1^-) = 2^+ & \sigma_1(1^-) = 1^+ & \sigma_2(1^-) = 3^+ \\
\sigma_0(2^+) = 1^- & \sigma_1(2^+) = 2^- & \sigma_2(2^+) = 4^- \\
\sigma_0(2^-) = 1^+ & \sigma_1(2^-) = 2^+ & \sigma_2(2^-) = 4^+ \\
\sigma_0(3^+) = 4^- & \sigma_1(3^+) = 3^- & \sigma_2(3^+) = 1^-
\end{array}$$

$$\sigma_0(3^-) = 4^+ \qquad \sigma_1(3^-) = 3^+ \qquad \sigma_2(3^-) = 1^+$$
$$\sigma_0(4^+) = 3^- \qquad \sigma_1(4^+) = 4^- \qquad \sigma_2(4^+) = 2^-$$
$$\sigma_0(4^-) = 3^+ \qquad \sigma_1(4^-) = 4^+ \qquad \sigma_2(4^-) = 2^+$$

Consideriamo ora il sottogruppo $\mathrm{B}_{1^+,D} \subseteq \mathcal{C}_2$ che fissa la bandiera 1^+. Costruiamo a partire da esso, lo spazio dei laterali $\mathrm{H} = \mathcal{C}_2/\mathrm{B}_{1^+,D}$.
H è costituito da otto elementi che ora elenchiamo (naturalmente scegliendo un rappresentante), unitamente alla azione che essi hanno sulla bandiera 1^+ (tale azione è ben definita perchè quozientiamo proprio per gli elementi che fissano 1^+).

$$\begin{aligned}
&1 && : 1^+ \longrightarrow 1^+\\
&\sigma_0 && : 1^+ \longrightarrow 2^-\\
&\sigma_1 && : 1^+ \longrightarrow 1^-\\
&\sigma_2 && : 1^+ \longrightarrow 3^-\\
&\sigma_0\sigma_1 && : 1^+ \longrightarrow 2^+\\
&\sigma_0\sigma_2 && : 1^+ \longrightarrow 4^+\\
&\sigma_1\sigma_2 && : 1^+ \longrightarrow 3^+\\
&\sigma_0\sigma_1\sigma_2 && : 1^+ \longrightarrow 4^-
\end{aligned}$$

I generatori $\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2$ agiscono su questi elementi suddividendoli in orbite:
σ_0-ORBITE (LATI $\diamond$ - $\circ$):

a) 1, σ_0

b) σ_1, $\sigma_0\sigma_1$

c) σ_2, $\sigma_0\sigma_2$

d) $\sigma_1\sigma_2$, $\sigma_0\sigma_1\sigma_2$

σ_1-ORBITE (LATI $\bullet$ - $\circ$):

a') 1, σ_1

b') σ_0, $\sigma_0\sigma_1$

c') σ_2, $\sigma_1\sigma_2$

d') $\sigma_0\sigma_2$, $\sigma_0\sigma_1\sigma_2$

σ_2-ORBITE (LATI $\bullet$ - $\diamond$):

a") 1, σ_2

b") σ_0, $\sigma_0\sigma_2$

c") σ_1, $\sigma_1\sigma_2$

d") $\sigma_0\sigma_1$, $\sigma_0\sigma_1\sigma_2$

Ed infine le "orbite di orbite":

$< \sigma_0, \sigma_1 >$-ORBITE (VERTICI $\circ$):

A) 1, σ_0, σ_1, $\sigma_0\sigma_1$

B) σ_2, $\sigma_0\sigma_2$, $\sigma_1\sigma_2$, $\sigma_0\sigma_1\sigma_2$

$< \sigma_0, \sigma_2 >$-ORBITE (VERTICI $\diamond$):

A') 1, σ_0, σ_2, $\sigma_0\sigma_2$

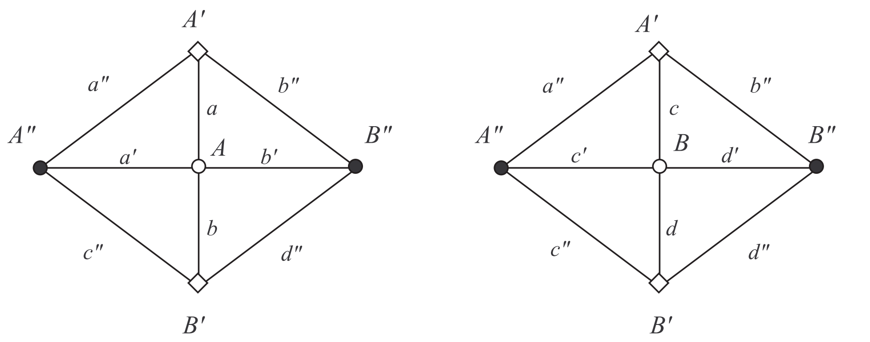
B') σ_1, $\sigma_0\sigma_1$, $\sigma_1\sigma_2$, $\sigma_0\sigma_1\sigma_2$

$< \sigma_1, \sigma_2 >$-ORBITE (VERTICI $\bullet$):

A") 1, σ_1, σ_2, $\sigma_1\sigma_2$

B") σ_0, $\sigma_0\sigma_1$, $\sigma_0\sigma_2$, $\sigma_0\sigma_1\sigma_2$

Possiamo a questo punto, per esercizio, "tornare indietro", cioè, supponendo date queste informazioni algebriche, ricostruire il disegno.
Partiamo da un vertice $\circ$, per esempio A). Da esso dipartono due lati $\bullet$ - $\circ$, rappresentati dalle σ_1-orbite a') e b'), e due lati $\diamond$ - $\circ$ rappresentati dalle σ_0-orbite a) e b). All'altro capo del lato a') troviamo il vertice A"), mentre all'altro capo di b') troviamo il vertice B"). Similmente all'altro capo del lato a) c'è il vertice A'), mentre all' altro capo di b) c'è il vertice B'). Proseguendo con questa tecnica ci riconduciamo alla seguente figura:



Si tratta ora soltanto di incollare lungo i bordi dei rombi per ritrovare la sfera con il nostro amato dessin.

Capitolo 3

Il teorema di Belyi

Questo è un capitolo piccolino ma cruciale nello sviluppo della nostra teoria. Il teorema di Belyi, che risale al 1979, è un risultato portentoso. Ogni rivestimento ramificato identifica una superficie di Riemann definita su $\bar{\mathbb{Q}}$; questo era stato già capito precedentemente da Grothendieck. Il risultato sorprendente è che vale anche il viceversa. Nel suo *Esquisse d'un programme* dice Grothendieck:

> *"Toute carte finie orientée donne lieu à une courbe algébrique projective et lisse définie sur $\bar{\mathbb{Q}}$, et il se pose alors immédiatement la question: quelles sont les courbes algébriques sur $\bar{\mathbb{Q}}$ obtenues ainsi - les obtiendrait - on toutes, qui sait? (...) Une telle supposition avait l'air à tel point dingue que j'étais presque gêné de la soumettre aux compétences en la matière. Deligne consulté trouvait la supposition dingue en effet, mais sans avoir un contre-exemple dans ses manches. Moins d'un an aprés (...) le mathématicien soviétique Belyi annonce justement ce résultat, avec une démonstration d'une simplicité déconcertante (...)."*

L' articolo originale in cui Belyi presenta il proprio teorema ([B]) ha una veste non facilmente comprensibile, dovuta principalmente all'utilizzo di notazioni, per i nostri standard, abbastanza "esoteriche". Presentiamo qui il teorema rielaborando con una certa libertà l'impostazione di [S] e di [SV1].

3.1 Il teorema

Teorema 1 (di Belyi). *Sia X una curva algebrica definita su $\mathbb{C}$. X è definita su $\bar{\mathbb{Q}}$ se e solo se esiste una funzione olomorfa $f\colon X \longrightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ tale che ogni* *valore critico di f vive nell'iniseme $\{\ 0,\ 1,\ \infty\ \}$. In altre parole f realizza un rivestimento di $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ ramificato solamente sulla fibra di 0, 1, ∞.*

Dimostrazione. Osserviamo innanzitutto che è una diretta conseguenza del teorema di esistenza di Riemann che una superficie di Riemann X è definita su $\bar{\mathbb{Q}}$ se e solo se ammette una funzione olomorfa $p : X \longrightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ i cui valori critici giacciono in $\bar{\mathbb{Q}}$.
Quindi se esiste una mappa f ramificata solo sopra 0, 1, ∞, sicuramente X è definita su $\bar{\mathbb{Q}}$.
Viceversa, supponiamo ora che X sia definita su $\bar{\mathbb{Q}}$. Sia g una funzione meromorfa su X tale che tutti i valori critici di g appartengono a $\bar{\mathbb{Q}}$. A partire da tale g vogliamo costruire la funzione meromorfa desiderata mediante la composizione successiva di g con un numero finito di trasformazioni $\varphi_i : \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$. Il primo passo consiste nel portare tutti i valori critici su $\mathbb{Q}$. Quindi procederemo ad "impilarli" su $\{\ 0,\ 1,\ \infty\ \}$.

1) Sceglieremo i φ_i come polinomi a coefficienti razionali. In questo modo ∞ sarà sempre mandato in ∞. Denotiamo con W_g l'insieme dei valori critici al finito di g.
Consideriamo $W_g \backslash \mathbb{Q}$ ed "allarghiamolo" aggiungendo tutti i conjugati sotto l'azione di Gal($\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}$). Questa operazione consiste nel considerare l'ideale di tutti i polinomi a coefficienti razionali che si annullano su $W_g \backslash \mathbb{Q}$. Poichè $\mathbb{Q}$ [t] è un dominio ad ideali principali, tale ideale è generato da un solo polinomio, di cui vogliamo prendere tutte le radici. Otteniamo così un insieme che contiene $W_g \backslash \mathbb{Q}$ che denotiamo con Λ_g . Esso è un insieme naturalmente finito, di cardinalità diciamo N.
Torniamo a considerare il polinomio

$$\varphi_1 = \prod_{\lambda \in \ \Lambda_g} (\mathrm{t} - \lambda).$$

Se ora consideriamo $g_1 = \varphi_1 \circ g$, osserviamo il seguente comportamento:

- i "vecchi" valori critici razionali continuano ad essere razionali;
- i valori critici che vivevano in $W_g \backslash \mathbb{Q}$ vengono tutti schiacciati in 0;
- nascono $N-1$ "nuovi" valori critici dall'annullarsi della derivata φ_1' di φ_1.

Consideriamo questi $N-1$ "nuovi" valori. La mia affermazione è che Λ_{g_1} è costituito esattamente da questi punti. Siano $\alpha_1, ..., \alpha_{N-1} \in \bar{\mathbb{Q}}$ gli zeri di φ_1' e $\beta_1, ..., \beta_{N-1}$ le loro immagini mediante φ_1. L'insieme $\{\alpha_1, ..., \alpha_{N-1}\}$

contiene tutti i $\mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$-conjugati dei propri elementi, poichè $\varphi_1' \in \mathbb{Q}[\ t\ ]$.
Sia ora $\sigma \in \mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$:

$$\varphi_1(\sigma\alpha_i) = \sigma(\varphi_1(\alpha_i)) = \sigma\beta_i.$$

Tale relazione implica che anche l'insieme $\{\beta_1, ..., \beta_{N-1}\}$ contiene tutti i $\mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$-conjugati dei propri elementi e che quindi tale insieme coincide con Λ_{g_1}.
Adesso consideriamo

$$\varphi_2 = \prod_{\lambda \in \Lambda_{g_1}} (\mathrm{t} - \lambda),$$

$$g_2 = \varphi_2 \circ \varphi_1 \circ g$$

e così via. Iterando questa procedura un numero finito di volte (al massimo N) otteniamo infine una funzione $\tilde{g}$ tale che $W_{\tilde{g}} \subseteq \mathbb{Q}$.

2) Se $\mid W_{\tilde{g}} \mid \leq 3$, è sufficiente un automorfismo di $\mathbb{P}^1(\mathbb{Q})$, ossia un'applicazione lineare fratta a coefficienti interi, a portare gli elementi di $W_{\tilde{g}}$ in un sottoinsieme di $\{\ 0,\ 1,\ \infty\ \}$.
Supponiamo quindi $\mid W_{\tilde{g}} \mid > 3$, e scegliamo tre punti di $W_{\tilde{g}}$. Mediante un automorfismo possiamo fare in modo che essi diventino 0, 1 e q, con $0 < q < 1$.
Esistono in particolare interi positivi m ed n tali che

$$q = \frac{m}{m+n}\ .$$

Applichiamo ora la trasformazione

$$t : z \longmapsto \frac{(m+n)^{(m+n)}}{m^m n^n}\ z^m (1-z)^n.$$

Osserviamo che:

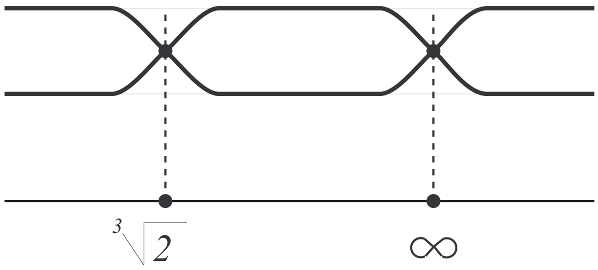
- 0 ed 1 sono entrambi mandati in 0;
- $t(q) = 1$;
- gli zeri della derivata prima t' vivono in $\{\ 0,\ 1,\ \infty\ \}$.

Non vengono introdotti ulteriori valori critici. E' per ottenere questa cruciale proprietà che siamo costretti ad utilizzare, nel definire t, degli esponenti apparentemente bizzarri.

Attraverso questa procedura abbiamo ridotto di uno la cardinalità dell'insieme dei valori critici $W_{\tilde{g}}$. Iterandola un numero finito di volte possiamo infine giungere ad "impilare" tutti i valori critici su $\{\ 0,\ 1,\ \infty\ \}$.
La funzione f desiderata si ottiene componendo tutte le trasformazioni ausiliarie introdotte nel corso della dimostrazione.

3.2 Esempio

Vogliamo ora visualizzare concretamente in tutta la sua semplicità teorica (ed in tutta la sua complicatezza pratica) la costruzione fatta nella dimostrazione del teorema di Belyi.
Supponiamo quindi di avere un rivestimento doppio di $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$, ramificato in due punti, di cui almeno uno non appartenga a $\mathbb{Q} \cup \{\infty\}$. Scegliamo come valori critici ∞ e $\sqrt[3]{2}$. La mappa di rivestimento è illustrata dalla seguente figura:



La formula di Riemann-Hurwitz ci dice che la curva X ha genere 0. Una possibile equazione per la funzione meromorfa p è

$$p : z \longmapsto z^2 + \sqrt[3]{2}.$$

Usando le notazioni introdotte:

$$W_p = \{\sqrt[3]{2}\},$$

$$\Lambda_p = \{\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{2}\ \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{3}}, \sqrt[3]{2}\ \mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{3}}\},$$

$$\varphi_1 : \ z \longmapsto z^3 - 2.$$

Osserviamo che:

- $\varphi_1(\Lambda_p) = 0$;
- il nuovo valore critico che nasce dalla derivata φ_1' è $\{ \text{-2} \} \in \mathbb{Q}$.

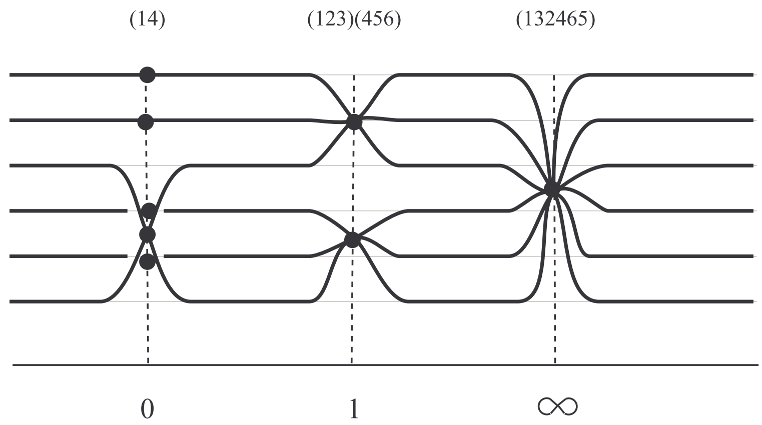
Resta ora soltanto da portare i tre valori 0, -2 e ∞ in un sottoinsieme di $\{ 0, 1, \infty \}$. Ciò è molto semplicemente ottenuto mediante un'omotetia t

$$t : \ z \longmapsto -\frac{1}{2}z.$$

Lo schema riassuntivo della procedura è il seguente:

$$X(=\mathbb{P}^1(\mathbb{C})) \xrightarrow{p} \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \xrightarrow{z^3-2} \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \xrightarrow{-\frac{1}{2}z} \mathbb{P}^1(\mathbb{C}).$$

La funzione finale ottenuta realizza un rivestimento ramificato di $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ di grado 6, le cui caratteristiche sono riassunte nel seguente disegno:



3.3 Morfismi di Belyi

Sia X una curva algebrica definita su $\mathbb{C}$. Una funzione olomorfa $f : X \longrightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ si dice *morfismo di Belyi* se tutti i valori critici di f giacciono in $\{ 0, 1, \infty \}$.
Un morfismo di Belyi si dice *quasi-pulito* se l'ordine di ramificazione di tutti i punti sopra 1 è minore o uguale a due.
Si dice invece *morfismo pulito* se l'ordine di ramificazione di tutti i punti della fibra di 1 è esattamente due.

Con questa terminologia il teorema di Belyi si riformula semplicemente dicendo che X è una curva algebrica definita su $\bar{\mathbb{Q}}$ se e solo se possiede un morfismo di Belyi.
In verità possiamo dare una versione ancora (un pochino) più forte di questo teorema:

Corollario 1. *X è una curva algebrica definita su $\bar{\mathbb{Q}}$ se e solo se possiede un morfismo di Belyi pulito.*

Dimostrazione. Se $f : X \longrightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ è un morfismo di Belyi, allora

$$g = 4f(1-f)$$

è un morfismo pulito. Infatti:

- l'∞ di f viene mandato da g in ∞ ($g(f^{-1}(\infty) = \infty$);
- gli 0 e gli 1 di f sono tutti schiacciati da g a 0 ($g(f^{-1}(\{0,1\}) = 0$);
- osserviamo i "nuovi" valori critici che nascono da g'. Essendo

$$g' = 4f'(1-2f).$$

essi corrispondono agli zeri di $(1-2f)$ e sono tutti punti esattamente doppi perchè f è liscia sopra $\frac{1}{2}$. La loro immagine è

$$g(f^{-1}(1/2)) = 4(1/2)(1-1/2) = 1.$$

Sia X una curva algebrica definita su $\bar{\mathbb{Q}}$ ed f un morfismo di Belyi su di essa. Chiameremo la coppia (X, f) una *coppia di Belyi.*
Due coppie di Belyi (X, f), (Y, g) sono dette *isomorfe* se esiste un morfismo $\Phi: \; X \longrightarrow Y$ tale che $f = g \circ \Phi$.
Se g è un morfismo pulito diciamo che (Y, g) è una *coppia pulita.*

3.3.1 Morfismi triangolari

Un morfismo di Belyi pulito si dice *triangolare* se l'ordine di ramificazione di tutti i punti sopra ∞ è esattamente tre.
Ogni curva algebrica X definita su $\bar{\mathbb{Q}}$ ammette un morfismo triangolare. Sia $g \,:\, X \longrightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ un morfismo di Belyi pulito. Otteniamo un morfismo triangolare h per composizione con una opportuna mappa da $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ in sè:

$$h: \; X \;\xrightarrow{g}\; \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \;\xrightarrow{\varphi}\; \mathbb{P}^1(\mathbb{C}).$$

La funzione φ deve soddisfare alle seguenti richieste:

- φ è un rivestimento ramificato di ordine tre;
- l'insieme dei valori critici di φ è contenuto in $\{\ 0,\ 1,\ \infty\}$;
- 0 ed ∞ sono mandati in 0 e costituiscono l'intera fibra di 0 via φ; uno dei due sarà un punto doppio, l'altro semplice;
- sulla fibra dell' 1 troviamo 1 come punto semplice più un altro punto P doppio;
- la fibra di ∞ è costituita da un unico punto Q, necessariamente triplo.

Una mappa che gode di queste proprietà è per esempio

$$z \longmapsto (3/4)^3 \frac{z}{(z-1/4)^3}.$$

Quindi se g è un morfismo pulito su X, allora

$$(3/4)^3 \frac{g}{(g-1/4)^3}$$

è un morfismo triangolare.

Capitolo 4

La corrispondenza di Grothendieck

Giungiamo infine al cuore della nostra teoria, mettendo in relazione le curve algebriche definite su $\bar{\mathbb{Q}}$ con i dessins d'enfants. In questo capitolo analizziamo accuratamente la corrispondenza di Grothendieck. Iniziamo con una presentazione formale ed una altrettanto formale dimostrazione della corrispondenza. La maggior parte del capitolo è però dedicata ad un approccio costruttivo a tale argomento. In paragrafi separati abbiamo evidenziato le varie direzioni della corrispondenza, cercando di sostenere l'intuizione e con una esposizione il più possibile elementare e con l'utilizzo di numerosi esempi. Testi ispiratori sono stati [S] e [SV1], anche se da essi abbiamo attinto con parecchia libertà.

4.1 La corrispondenza

V'è una bijezione tra l'insieme dei disegni astratti puliti e l'insieme delle classi di isomorfismo di coppie di Belyi pulite.

Dimostrazione. La dimostrazione di questo teorema è praticamente stata fatta, pianin pianino, nel corso dei precedenti capitoli. Si tratta ora solamente di ripresentare i risultati precedentemente ottenuti e mostrare come da essi segua naturalmente questa corrispondenza. Il gruppo $\pi' = \pi/\langle l_1^2 \rangle$ è il quoziente del gruppo fondamentale π della sfera meno 0, 1, ∞, rispetto a due giri attorno al punto 1.
Il gruppo cartografico orientato $\mathcal{C}_2^+$ è stato introdotto nel capitolo 2.
Questi due gruppi sono canonicamente isomorfi. Basta definire la mappa sui

generatori

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{C}_2^+ & \longrightarrow & \pi' \\
 & & \\
\rho_0 & \longmapsto & l_0 \\
\rho_1 & \longmapsto & l_1 \\
\rho_2 & \longmapsto & l_\infty .
\end{array}$$

Nel capitolo 1 abbiamo mostrato esistere una bijezione tra le classi di conjugio di sottogruppi di indice finito di π' e le classi di isomorfismo di rivestimenti di $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ ramificati solo sopra 0, 1, ∞ tali che la ramificazione nei punti sopra 1 sia di grado al più due. Nel capitolo 3 abbiamo chiamato tali rivestimenti morfismi di Belyi ed abbiamo visto come essi caratterizzino le curve algebriche difinite su $\bar{\mathbb{Q}}$. Il teorema di Malgoire-Voisin ha messo in bijezione le classi di conjugio di sottogruppi di indice finito di $\mathcal{C}_2^+$ con i disegni astratti. E così la corrispondenza è nata.

$$\left\{ \begin{array}{c} disegni \\ astratti \end{array} \right\} \hookrightarrow \left\{ \begin{array}{c} classi\ di\ conjugio \\ di\ sottogruppi\ di \\ indice\ finito\ di\ \mathcal{C}_2^+ \end{array} \right\} \cong \left\{ \begin{array}{c} classi\ di\ conjugio \\ di\ sottogruppi\ di \\ indice\ finito\ di\ \pi' \end{array} \right\} \hookleftarrow \left\{ \begin{array}{c} coppie\ di\ Belyi \\ quasi-pulite \end{array} \right\}.$$

Tra pochissimo apparirà ovvio che questa corrispondenza può essere ristretta senza alcun problema agli enti "puliti" sia a destra che a sinistra. Il corollario al teorema di Belyi ci assicura che, così facendo, non "perdiamo" alcuna curva su $\bar{\mathbb{Q}}$ e che quindi tale semplificazione è lecita. Per ora ci accontentiamo di aver quasi-dimostrato, in maniera elegante e pulita, ma forse un po' misteriosa, il nostro risultato. Quello che vogliamo fare ora è dare una rappresentazione più costruttiva della corrispondenza di Grothendieck. E' già stupefacente l' esistenza di questa bijezione, ma essa serve a ben poco se non impariamo a maneggiarla.

4.2 Dalle curve ai disegni

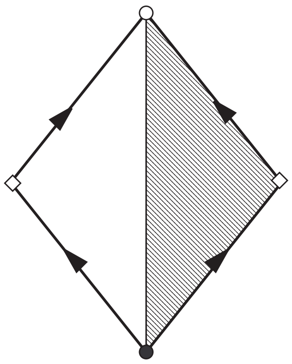
Supponiamo di avere una coppia di Belyi (X, f) e di voler ad essa associare un disegno $D = X_0 \subseteq X_1 \subseteq X_2$. Come supporto del disegno X_2 scegliamo il modello topologico della curva X. Su di essa consideriamo il disegno ottenuto dalla retroimmagine mediante f del segmento [0,1]. L'insieme dei vertici X_0 sarà naturalmente costituito da $f^{-1}(0)$.
Se il morfismo di Belyi è pulito allora il disegno presenterà un vertice alla fine di ogni lato. Se il morfismo è solo quasi-pulito, possiamo avere anche lati con una estremità libera.
Notiamo inoltre che ad un morfismo triangolare corrisponde un disegno triangolare.
Il disegno duale D^* è ottenuto come retroimmagine del segmento [1,∞]. Il

marking canonico si ottiene denominando come vertici $\bullet$ le retroimmagini mediante f dello zero, come vertici $\diamond$ le retroimmagini dell'uno e come vertici $\circ$ le retroimmagini dell'infinito.

Infine una piccola osservazione sulla nostra scelta di nomenclatura: a morfismi puliti corrispondono disegni puliti, a morfismi quasi-puliti corrispondono disegni, a morfismi di Beyli generici corrispondono grafi che non abbiamo elevato a dignità di aver un nome nella nostra trattazione. Si potrebbe in verità abbastanza facilmente ristabilire un perfetto parallelo chiamando *quasi puliti* i nostri disegni e semplicemente *disegni* i grafi che possono nascere da un generico morfismo di Belyi. [S], per esempio, fa così. Visto tuttavia che noi lavoriamo esclusivamente con disegni puliti, o al più quasi-puliti, è sembrato inultile appesantire la nostra già ricca terminologia.

4.3 Dai disegni alle curve

Partiamo ora da un disegno D. Dotiamolo del marking canonico e costruiamo l'insieme delle bandiere $\mathcal{F}(D)$ e l'insieme delle bandiere positive $\mathcal{F}^+(D)$. Ad ogni bandiera positiva associamo l'unica bandiera negativa che condivide con essa il lato del tipo $\bullet - \circ$. Il supporto topologico del disegno risulta quindi "piastrellato" da losanghe di questo tipo:



Lo spazio topologico che si ottiene identificando i due vertici $\diamond$ ed i lati della losanga come indicato in figura è chiaramente omeomorfo alla sfera. Possiamo quindi identificare tutte le losanghe a dei $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ "tagliati e spianati", pensando ai vertici $\bullet$, $\diamond$, $\circ$ come a 0, 1, ∞ ed ai lati $\bullet - \diamond$, $\diamond - \circ$, $\bullet - \circ$ come ai segmenti [0,1], [1,∞], [0,∞].
Nasce in questo modo un morfismo

$$f:\ X_2 \longrightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$$

che realizza X_2 come un rivestimento ramificato (solo sopra $0,\,1,\,\infty$) di $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$. Possiamo ora dotare X_2 di una struttura analitica complessa richiedendo che f sia un morfismo razionale.

E' importante notare che il morfismo di Belyi associato ad un disegno astratto dato non è univocamente determinato. Infatti, poichè il disegno corrisponde ad una classe di isomorfismo di coppie di Belyi (X, f), f è definita soltanto a meno di automorfismi della superficie di Riemann X.

4.4 Dai rivestimenti ai disegni

Supponiamo di avere un rivestimento di grado finito di $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ ramificato sopra $\{0,\,1,\,\infty\}$, tale che l'ordine di ramificazione di ogni punto nella fibra dell'1 sia al più due. Supponiamo di conoscere il gruppo di monodromia associato al rivestimento. In questo caso specifico esso nasce in questo modo: scelto un punto $x \notin \{0,\,1,\,\infty\}$ siano $x_1, \cdots, x_d$ i punti della fibra di x. I generatori del gruppo fondamentale della sfera bucata nei tre punti $0,\,1,\,\infty$ inducono naturalmente delle permutazioni $\sigma_0,\ \sigma_1,\ \sigma_\infty$ di $\{x_1, \cdots, x_d\}$ tali che $\sigma_0\sigma_1\sigma_\infty = \mathbb{1}_{S_d}$. La richiesta che l'ordine di ramificazione dei punti sopra 1 sia minore o uguale a due si traduce nel fatto che σ_1 come permutazione ha ordine al più due.
Questo dato algebrico ci permette in verità di ricostruire il rivestimento. Il nostro proposito adesso è sfruttare questo dato algebrico per ottenere immediatamente il disegno associato al rivestimento.

Cominciamo col notare che la formula di Riemann-Hurwitz

$$2g_X - 2 = d(2g_{\mathbb{P}^1(\mathbb{C})} - 2) + \sum(b_f(x) - 1)$$

ci permette immediatamente di conoscere il genere della curva associata al rivestimento. $\sum_{x=0,1,\infty} b_f(x)$ si ottiene decomponendo le sostituzioni $\sigma_0, \sigma_1, \sigma_\infty$ in cicli disgiunti e sommando l'ordine - meno uno - di ogni singolo ciclo.

Ora consideriamo σ_∞ decomposto in cicli disgiunti, $\sigma_\infty = \sigma_\infty^1 \cdots \sigma_\infty^k$. Ogni ciclo disgiunto è associato ad una componente del dessin. Per ogni σ_∞^i, detto n^i l'ordine della sostituzione, costruiamo un poligono ad n^i lati. Congiungendo il baricentro del n^i-gono con i baricentri dei singoli lati otteniamo n^i losanghe, che etichetteremo, in senso antiorario, con i simboli della sostituzione σ_∞^i.
A questo punto consideriamo σ_0 ed andiamo ad incollare i lati dei vari poligoni in modo che, leggendo le losanghe in senso antiorario, si ricostruiscano proprio i cicli disgiunti che costituiscono σ_0.
Si ottiene così una superficie topologica compatta ed un dessin su di essa costituito dai lati dei poligoni.

Poichè, come spesso accade, questa procedura è molto più facile da realizzare che non da descrivere, cerchiamo di rendere le cose più chiare.

Esempio

Consideriamo un rivestimento di grado otto di $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ ramificato solo sopra 0, 1, ∞. Il gruppo di monodromia associato ad esso sia generato dalle seguenti sostituzioni:

$$\begin{array}{lllll} \sigma_0 & = & & & (14753)(68) \\ \sigma_1 & = & & & (12)(34)(56)(78) \\ \sigma_\infty & = & (\sigma_0\sigma_1)^{-1} & = & (123)(456)(78). \end{array}$$

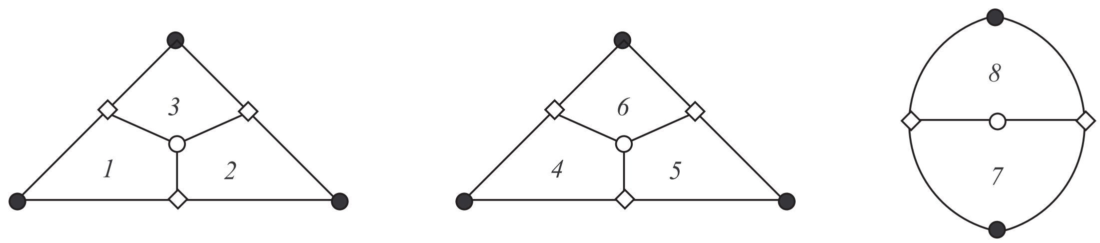
L'elemento σ_0 si decompone in tre cicli disgiunti, uno di ordine cinque, uno di ordine due ed uno di ordine uno (si tratta del simbolo 2 che resta fisso). L'ordine totale di ramificazione sopra lo zero è

$$b_f(0) = (5-1) + (2-1) + (1-1) = 5.$$

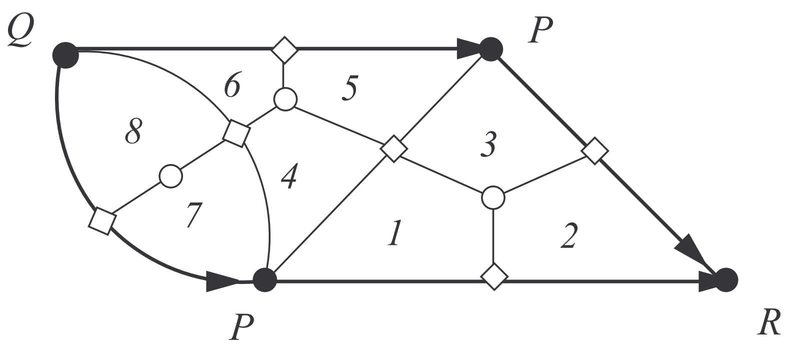
Similmente

$$b_f(1) = 4,$$
$$b_f(\infty) = 5.$$

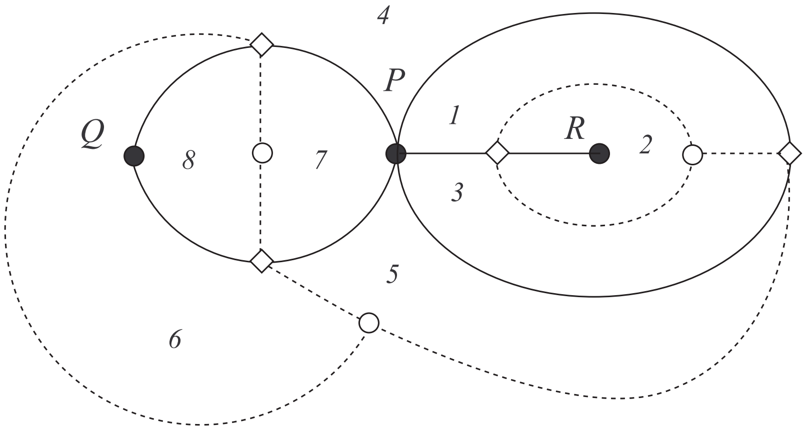
Quindi, la formula di Riemann-Hurwitz ci dice che il genere della curva desiderata è zero.
Consideriamo la decomposizione di $\sigma_\infty = (123)(456)(78)$ ed a partire da essa costruiamo i seguenti poligoni:



Ora facciamoci guidare da σ_0 nell'incollare tra loro questi poligoni. Se parto dalla losanga 1 e giro attorno al vertice in senso antiorario, dovrò incontrare, nell'ordine, le losanghe 4, 7, 5 ed infine 3 per poi tornare ad 1.
Ciò che otteniamo ha questa forma:



Come vedete i vertici corrispondenti alle losanghe 6 ed 8 si saldano tra di loro a costituire lo scambio (68), mentre la losanga 2 si richiude su se stessa.
Se vogliamo visualizzare il dessin sulla sfera nella nostra solita maniera "stereografica" otteniamo:



4.5 Dai disegni ai rivestimenti

Dato un disegno D è elementare ricavare da esso tutte le informazioni relative al rivestimento ad esso associato. Per avere il grado del rivestimento è sufficiente contare il numero delle bandiere positive in $\mathcal{C}_2^+$. Se il disegno è pulito, si può anche, più semplicemente, raddoppiare il numero dei lati.
Per conoscere gli ordini di ramificazione sopra 0 basta contare il numero di losanghe incidenti i vari vertici del disegno. Per avere gli ordini di ramificazione sopra ∞ si contano le losanghe in ogni singola componente. Sopra 1 è sufficiente verificare se i lati del disegno sono aperti (ivi non c'è ramificazione) o chiusi (punto doppio).

Infine vogliamo conoscere le sostituzioni che generano il gruppo di monodromia associato al rivestimento. A tale scopo numeriamo le losanghe e giriamo in senso antiorario attorno ad ogni vertice del dessin. I cicli che nascono sono esattamente i cicli disgiunti che danno luogo alla sostituzione σ_0. La sostituzione σ_∞ si ottiene allo stesso modo girando attorno ad i vertici di tipo $\circ$, sempre in senso antiorario.
Infine σ_1 è facilmente ottenibile dalla relazione $\sigma_0\sigma_1\sigma_\infty = \mathbb{1}_{S_d}$.

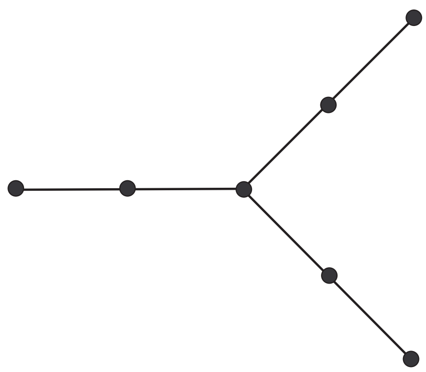
Se provate, col disegno nato dall'esempio nel paragrafo precedente, a "tornare indietro", otterrete naturalmente il rivestimento di partenza.

4.6 Esempi

A conclusione di questo capitolo vogliamo mostrare alcuni esempi, per rendere più concreta e visuale la corrispondenza costruita. Inizialmente ci occupiamo di alberi sulla sfera. Poichè $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ ammette un'unica struttura analitica, si tratta di individuare il morfismo di Belyi associato ad un dato disegno. Presentiamo una tecnica elementare che può essere utilizzata per determinare questo morfismo per alberi abbastanza piccoli. Dopodichè presentiamo un particolarissimo disegno la cui importanza scopriremo successivamente essere notevole. Infine, sulla linea degli ultimi due paragrafi, vogliamo elencare tutti i possibili rivestimenti quasi-puliti di grado quattro della sfera meno tre punti.

4.6.1 Un albero

Dato il seguente disegno



vogliamo determinare il morfismo di Belyi ad esso associato. Si tratterà di una mappa $f:\ \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$. Poichè il disegno è un albero e quindi ha un solo vertice $\circ$, possiamo cercare il nostro morfismo in modo che fissi il punto $\infty \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$, cioè tra i polinomi. Stiamo quindi cercando un polinomio di grado 12, con sette zeri distinti, uno triplo, tre doppi e tre semplici. Inoltre vogliamo che assuma il valore 1 in sei punti distinti, ciascuno con ordine di ramificazione esattamente doppio. Detta così, sembra un' impresa abbastanza improba. Vogliamo quindi fare ricorso ad un piccolo trucco che può sempre essere adoperato per i disegni puliti. Scambiamo il ruolo degli zeri e degli uni. Se il polinomio che cerchiamo ha sei zeri doppi si tratta del quadrato di un polinomio di sesto grado: abbiamo così dimezzato il grado del polinomio che cerchiamo. Una volta che avremo trovato il polinomio q che realizza la configurazione con gli zeri e gli uni scambiati, è sufficiente considerare il polinomio $1 - q$. Esso è quello desiderato.

Ricapitolando: siamo alla ricerca di un polinomio di grado sei, con sei zeri distinti e tale che la derivata prima abbia uno zero doppio e tre semplici. La ricerca di uno zero doppio per la derivata ci porta a cercare il nostro polinomio tra quelli della forma:

$$p = \alpha(z^3 + 1)(z^3 + \beta).$$

La derivata prima

$$p' = 3\alpha z^2(2z^3 + \beta + 1)$$

ha 0 come zero doppio e tre zeri semplici corrispondenti a $-\sqrt[3]{\frac{\beta+1}{2}}$, $-\sqrt[3]{\frac{\beta+1}{2}}\ \mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{3}}$, $-\sqrt[3]{\frac{\beta+1}{2}}\ \mathrm{e}^{i\frac{4\pi}{3}}$.
Vogliamo ora che tutti i punti critici si "impilino" sopra all'uno, cioè che

$$1 = p(0) = p(-\sqrt[3]{\frac{\beta+1}{2}}) = p(-\sqrt[3]{\frac{\beta+1}{2}}\ \mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{3}}) = p(-\sqrt[3]{\frac{\beta+1}{2}}\ \mathrm{e}^{i\frac{4\pi}{3}}).$$

Questo porta all' equazione:

$$\beta = -\frac{1}{4}(\beta + 1)^2 + \beta,$$

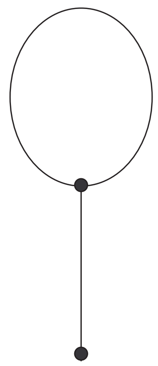
cioè

$$\beta = -1.$$

Scelto $\alpha = -1$ otteniamo anche che il valore critico sia 1. A questo punto abbiamo il polinomio

$$q = p^2 = [(z^3 + 1)(z^3 - 1)]^2.$$

4.6.2 Il palloncino



Questo disegno rappresenta un morfismo di Belyi $\varphi : \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$. Ricaviamo come esercizio l'espressione esplicita di tale mappa.
Osserviamo innanzitutto che φ è un rivestimento ramificato di grado quattro, le cui caratteristiche sono riassunte nel seguente schema:

$$\begin{array}{cccl} \varphi: \quad \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) & \longrightarrow & \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) & \\ & & & \\ P_1 & \longmapsto & 0 & \text{semplice} \\ P_2 & \longmapsto & 0 & \text{triplo} \\ Q_1 & \longmapsto & \infty & \text{semplice} \\ Q_2 & \longmapsto & \infty & \text{triplo} \\ R & \longmapsto & 1 & \text{doppio} \\ S & \longmapsto & 1 & \text{doppio.} \end{array}$$

Assegniamo dei valori ad alcuni dei punti critici di modo da ottenere un'espressione il più possibile semplificata. La scelta più conveniente mi pare: $P_2 = 0$, $Q_2 = \infty$, $P_1 = -8$.
Una mappa che gode delle proprietà di ramificazione sopra enunciate ha la forma

$$\varphi(z) = -\frac{z^3(z+8)}{\alpha(z-Q_1)}, \qquad Q_1, \alpha \in \mathbb{C}.$$

Vogliamo ora imporre due punti doppi sopra l'1. Questo equivale a chiedere che l'equazione $\varphi(z) = 1$ abbia due soluzioni doppie, cioè che l'espressione

$$z^3(z+8) + \alpha(z-Q_1)$$

si fattorizzi nel prodotto di due quadrati, cioè

$$z^3(z+8) + \alpha(z-Q_1) = (z+a)^2(z+b)^2.$$

Eguagliando i coefficienti dei termini di grado uguale otteniamo:

$$\begin{aligned} z^4&: \quad 1=1\\ z^3&: \quad 8=2a+2b\\ z^2&: \quad 0=a^2+b^2+4ab\\ z&: \quad \alpha=2ab^2+2a^2b\\ t.n.&: \quad -\alpha Q_1=a^2b^2. \end{aligned}$$

Che può essere ulteriormente semplificato ponendo $\sigma = a+b$, $\pi = ab$:

$$\begin{cases} 8 & = \ 2\sigma \\ 0 & = \ \sigma^2+2\pi \\ \alpha & = \ 2\sigma\pi \\ -\alpha Q_1 & = \ \pi^2 \end{cases}$$

Da cui

$$\sigma = 4$$

$$\pi = -8$$

$$\alpha = -64$$

$$Q_1 = 1.$$

I valori $R=-a$, $S=-b$, sono infine $-2 \pm 2\sqrt{3}$. La mappa

$$\varphi(z) = \frac{z^3(z+8)}{64(z-1)}$$

soddisfa alle nostre richieste.

In futuro ci interesserà porre delle richieste diverse sui punti critici. In particolare vorremo $P_1 = 0$, $P_2 = 1$, $Q_1 = \infty$.
Si può naturalmente procedere con tecnica analoga alla precedente e risolvere un sistema che diventa però più voluminoso. Osserviamo che c'è un metodo molto più semplice e naturale per raggiungere lo scopo. I morfismi di Belyi su $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ sono definiti a meno di automorfismi di $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$, cioè a meno di elementi $\Phi \in \mathbb{GL}(2,\mathbb{C})$. E' sufficiente quindi comporre φ con un'opportuna projettività per ottenere il morfismo desiserato.
Nel nostro caso la situazione è la seguente:

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) & \xrightarrow{\Phi} & \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) & \xrightarrow{\varphi} & \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \end{array}$$

$$\begin{array}{cccccl} 0 & \longmapsto & -8 & \longmapsto & 0 & \text{semplice} \\ 1 & \longmapsto & 0 & \longmapsto & 0 & \text{triplo} \\ \infty & \longmapsto & 1 & \longmapsto & \infty & \text{semplice.} \end{array}$$

La projettività Φ ha equazione

$$z \longmapsto \frac{8(z-1)}{8z+1}\ .$$

La mappa desiderata risulta quindi

$$\varphi'(z) = \varphi \circ \Phi(z) = -\frac{z(z-1)^3}{8(z+1/8)^3}\ .$$

4.6.3 Rivestimenti di $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ ramificati in 0, 1, ∞ di grado quattro e dessins associati

Dalla formula di Riemann-Hurwitz abbiamo

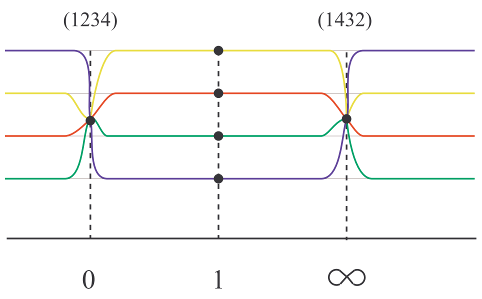
$$\sum_{0,1,\infty} (b_f(x) - 1) = 2g + 6.$$

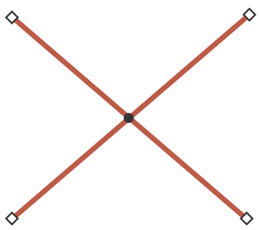
Il rivestimento è di grado quattro, quindi $(b_f(x) - 1)$ vale al massimo tre. E' possibile quindi che la formula sia verificata solamente per genere molto basso, $g = 0, 1$.

g=0

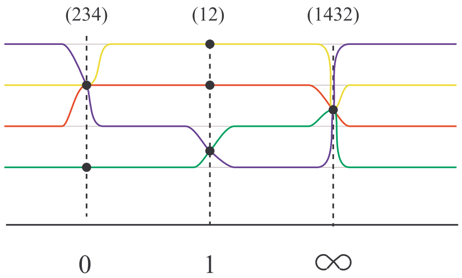
$$\sum_{0,1,\infty} (b_f(x) - 1) \quad = \quad 6 \quad = \quad \begin{cases} 0+3+3 & (*) \\ 1+2+3 & (**) \\ 2+2+2 & (***) \end{cases}$$

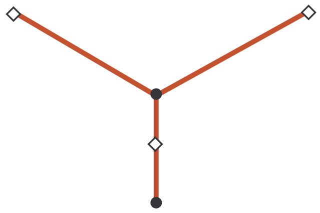
$(*)$ si tratta di un rivestimento che ha solo due punti di ramificazione quadrupli. Un esempio è chiaramente la mappa $z \mapsto z^4$. Il rivestimento ed il disegno ad essa associati sono i seguenti:



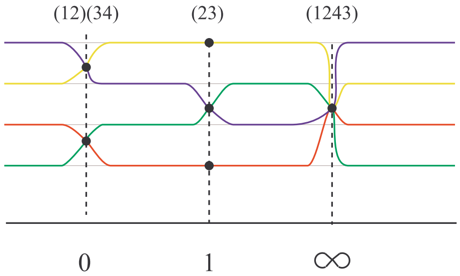


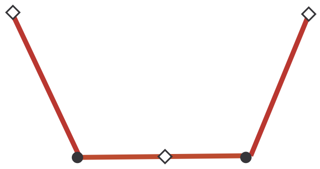
$(**)$ abbiamo tre possibilità per realizzare la seguente configurazione in modo da ottenere un disegno.
Possiamo avere sopra lo 0 un punto triplo ed un punto semplice, e sopra l'1 un punto doppio e due punti semplici.



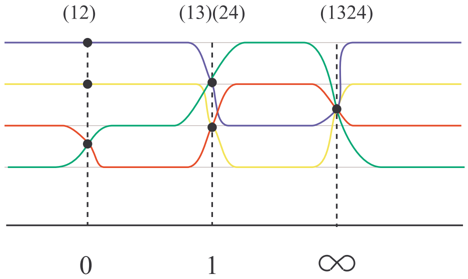


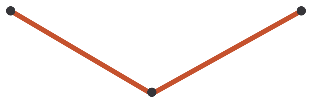
Possiamo avere due punti doppi sopra lo zero e sopra l'uno un punto doppio e due semplici.





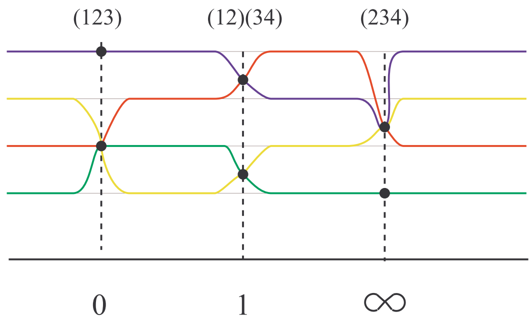
Infine abbiamo la situazione ottenuta scambiando il ruolo dello 0 e dell'1 rispetto al caso precedente.

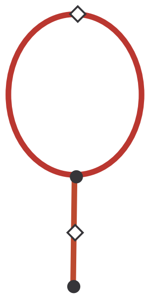




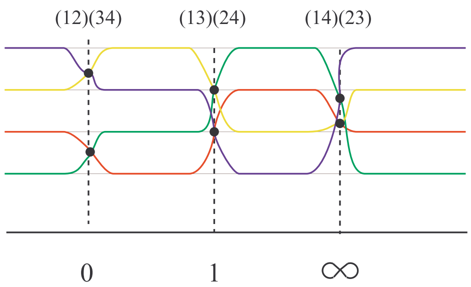
($* * *$) a priori, vi sono 4 possibili configurazioni, quante sono le possibilità di costituire insiemi di tre oggetti con elementi di due tipi distinti. Potremmo avere tutti tre i valori critici con due punti doppi sulla propria fibra, via via, fino ad averli tutti e tre con un punto triplo ed uno semplice. In verità, possiamo scartare a priori due di queste configurazioni. La configurazione con tutti i punti con fibra costituita da un punto triplo non ammette un disegno pulito, mentre quella costituita da due valori critici con due punti doppi sopra di essi ed il terzo valore con un triplo ed un semplice non è realizzabile in generale. Non è infatti possibile in S_4 ottenere l'identità componendo un triciclo e due doppi scambi. Restano quindi solamente le due seguenti configurazioni:

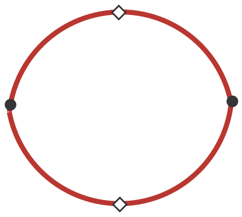
- due punti doppi sopra 1 e un triplo ed un semplice sopra 0, ∞.





- due punti doppi sopra ogni valore critico.

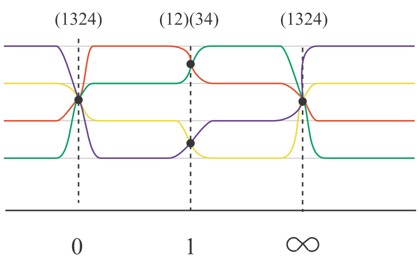


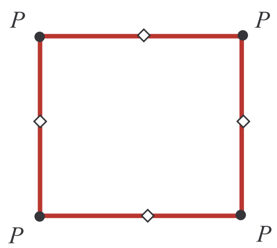


g=1

$$\sum_{0,1,\infty}(b_f(x)-1) \quad = \quad 8 \quad = \quad 2\ +\ 3\ +\ 3\ .$$

In questo caso l'unica configurazione che ammette un dessin pulito presenta due punti doppi sopra 1 e un solo punto quadruplo sopra gli altri valori critici. Il risultato è il seguente:





Capitolo 5

Jacobiane approssimate

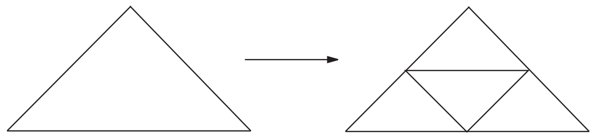
Data una curva algebrica X definita su $\bar{\mathbb{Q}}$ vogliamo ora definire una tecnica puramente combinatorica per ottenere una successione di varietà abeliane che fungono da "Jacobiane approssimate", cioè il cui limite è la usuale Jacobiana della curva X.
La Jacobiana è in generale un ente definito in modo trascendente. La nostra costruzione dovrebbe permettere, con l'ausilio di algoritmi che implementino i lunghi e noiosi conti, di ricavare esplicitamente la matrice dei periodi associata ad X.

Consideriamo un disegno $D = X_0 \subseteq X_1 \subseteq X_2$ triangolare. Esso definisce su X_2 la struttura di un complesso cellulare, che possiamo utilizzare per ricavare la coomologia della superficie. Con (X_D, β_D) indicheremo la coppia di Belyi associata al disegno D. Lo schema della nostra costruzione è il seguente:

- costruire un analogo "lineare a pezzi" dei differenziali abeliani su X; si ottiene così un sottospazio lineare g-dimensionale

$$L_D \subset H^1(X_D, \mathbb{C}).$$

- raffinare in modo canonico il disegno D, aggiungendo come nuovi vertici i baricentri di ogni lato del disegno.



Indicheremo con nD il diegno ottenuto dopo aver effettuato il raffinamento n volte. Le curve X_D e X_{nD} sono canonicamente isomorfe (ciò che cambia è il morfismo di Belyi associato ai due dessin). Possiamo quindi identificare anche tutti i gruppi di coomologia

$$H^1(X_D, \mathbb{C}) \cong H^1(X_{nD}, \mathbb{C}).$$

Gli spazi $L_{nD}, \quad n \in \mathbb{N}$, formano una successione in $H^1(X_D, \mathbb{C})$, il cui limite è l'immagine $\delta(H^0(X, \Omega))$.

Questa costruzione è stata elaborata agli inizi degli anni '90 da G.B. Shabat e V. Voevodsky; essa è descritta molto sommariamente in [SV1], mentre la dimostrazione della convergenza è contenuta nella bozza dell' articolo mai pubblicato [SV2]. Scopo di questo capitolo è "sviscerare" il primo punto della costruzione, la parte costruttiva che permette di definire le Jacobiane approssimate. Abbiamo dovuto interpretare le "guidelines" tratteggiate in [SV1] e dimostrare diversi risultati che ivi sono solo enunciati. Qui abbiamo proposto delle dimostrazioni il più possibile elementari e geometriche.

5.1 Catene e cocatene

Consideriamo il disegno D ed il disegno duale D^*. Entrambi realizzano un complesso cellulare su X_D. Denotiamo con $C_i(D)$ (rispettivamente $C_i(D^*)$) il gruppo delle i-catene del complesso realizzato da D (rispettivamente D^*), a coefficienti nel campo complesso.
Con $C^i(D)$ (risp. $C^i(D^*)$) indichiamo invece il gruppo delle i-cocatene.
Osserviamo innanzitutto che, attraverso l'intersezione, successivamente composta con la valutazione standard, realizziamo un isomorfismo canonico tra $C_i(D)$ e $C^{2-i}(D^*)$:

$$\begin{array}{ccc} C_i(D) & \longrightarrow & C^{2-i}(D^*) \\ \\ c & \longmapsto & (c \cap \_\,). \end{array}$$

Una volta introdotti i canonici operatori di bordo e cobordo (lo faremo esplicitamente tra qualche riga, permettetemi questo piccolo abuso logico per non perdere il filo), sarà immediato verificare le proprietà di commutazione riassunte nel seguente diagramma,

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & C_2(D) & \xrightarrow{\partial} & C_1(D) & \xrightarrow{\partial} & C_0(D) & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & C^0(D^*) & \xrightarrow{\delta} & C^1(D^*) & \xrightarrow{\delta} & C^2(D^*) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

che dipendono dalla seguente:

$$\delta(c \cap \_\,) := (c \cap \partial \_\,) = (\partial c \cap \_\,).$$

La prima uguaglianza è proprio la definizione di δ, la seconda si verifica sul campo. Comprendiamo ora appieno perchè D^* è stato detto disegno duale. Il complesso di catene associato a D^* è il complesso duale di quello associato a D e, naturalmente, vale anche il viceversa. Utilizzeremo queste proprietà a piene mani per poter sempre visualizzre (usando opportunamente catene in luogo di cocatene) tutte le costruzioni che faremo.

5.1.1 Gli operatori ∂ e δ

L' operatore $\partial : \ C_i(D) \longrightarrow C_{i-1}(D)$ è l'usuale operatore di bordo. E' identicamente nullo sulle 0-catene, associa alle 1-catene la somma a segni alterni dei propri estremi, alle 2-catene la combinazione di 1-catene che ne costituisce il bordo. Bisogna naturalmente fare delle scelte di orientazione che rendano la costruzione coerente. Raccoglieremo in una tavola riassuntiva le scelte di orientazione che verranno seguite in questo lavoro.
L'operatore δ risulta naturalmente definito come operatore trasposto di ∂.

Vogliamo ora però definire anche un operatore di cobordo sulle catene. Vedremo presto come esso sia strettamente imparentato con il cobordo usuale (da cui la scelta di utilizzare lo stesso nome).

$$\delta : \ C_i(D) \longrightarrow C_{i+1}(D)$$

associa ad una i-catena elementare c tutte le $(i+1)$-catene elementari il cui bordo contiene positivamente c. Ad un punto vengono associati tutti i segmenti entranti in esso, ad una 1-cella la somma a segni alterni delle 2-celle che si appoggiano ad essa.

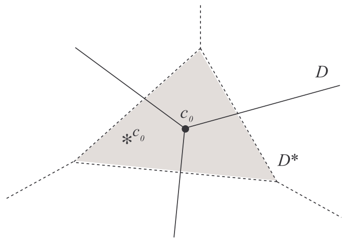
5.1.2 Gli operatori $\star_D$ combinatorici

Definiamo
$$\star_D : \ C_i(D) \longrightarrow C_{2-i}(D^*) \cong C^i(D)$$
come l'operatore di passaggio dalla base canonica alla base duale. Vista la cruciale importanza che esso rivestirà per i nostri scopi, ripercorriamo più

esplicitamente questa definizione:

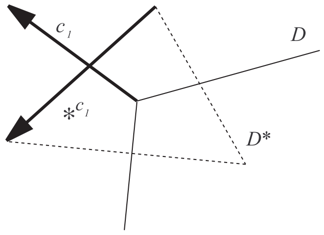
$$\star_D : \; C_0(D) \longrightarrow C_2(D^*)$$

$\star_D c_0$ è la 2-catena in $C_2(D^*)$ il cui baricentro è c_0.



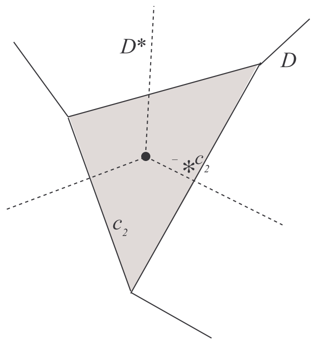
$$\star_D : \; C_1(D) \longrightarrow C_1(D^*)$$

$\star_D c_1$ è l'unica 1-catena semplice passante per il baricentro di c_1 ed orientata in modo tale che $\widehat{c_1 \star_D c_1} < \pi$.



$$\star_D : \; C_2(D) \longrightarrow C_0(D^*)$$

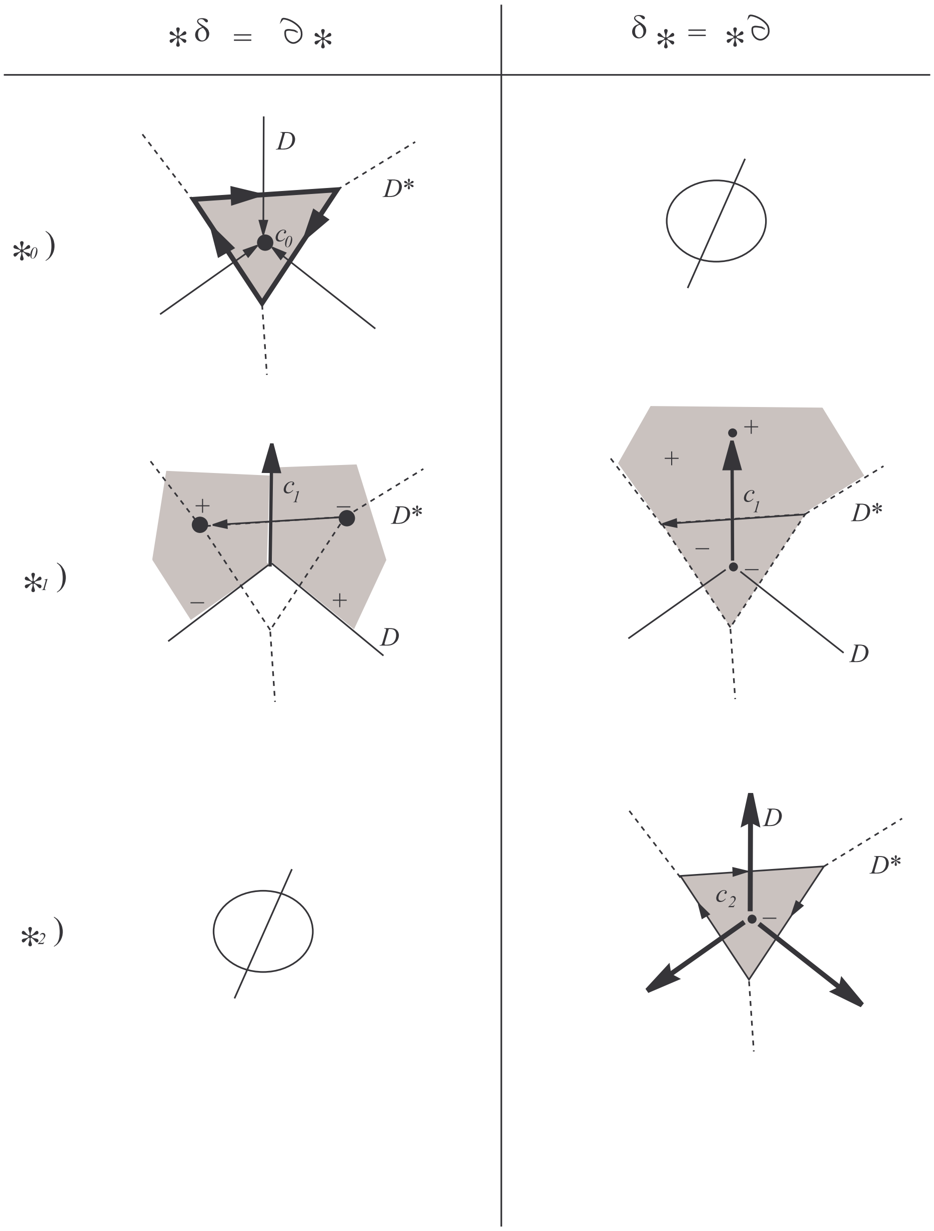
$\star_D c_2$ è il baricentro di c_2 preso con segno negativo.



Analogamente definiamo gli operatori $\star_{D^*} : \; C_i(D^*) \longrightarrow C_{2-i}(D^{**}) = C_{2-i}(D)$. Quando la situazione non induce ambiguità o quando vogliamo riferirci a proprietà godute tanto da $\star_D$ quanto da $\star_{D^*}$, utilizzeremo semplicemente la notazione $\star$. E' immediato verificare che valgono le seguenti proprietà:

- $\star_{D^*}\star_D = -\mathbb{1}_{C_i(D^*)}$, $\qquad\star_D\star_{D^*} = -\mathbb{1}_{C_i(D)}$;
- $\delta\star = \star\partial$, $\qquad\star\delta = \partial\,\star$.

Illustriamo queste ultime con una figura:



Abbiamo così realizzato degli isomorfismi che rendono commutativo il seguente diagramma.

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & C_0(D^*) & \xrightarrow{\delta} & C_1(D^*) & \xrightarrow{\delta} & C_2(D^*) & \longrightarrow & 0 \\ & & \star\updownarrow & & \star\updownarrow & & \star\updownarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & C_2(D) & \xrightarrow{\partial} & C_1(D) & \xrightarrow{\partial} & C_0(D) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Unendo queste informazioni a quelle ottenute precedentemente possiamo infine mettere in relazione catene e cocatene ed i due operatori di cobordo che abbiamo introdotto. Tutte le informazioni sono riassunte nel diagramma seguente.

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & C_0(D^*) & \xrightarrow{\delta} & C_1(D^*) & \xrightarrow{\delta} & C_2(D^*) & \longrightarrow & 0 \\ & & \star\updownarrow & & \star\updownarrow & & \star\updownarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & C_2(D) & \xrightarrow{\partial} & C_1(D) & \xrightarrow{\partial} & C_0(D) & \longrightarrow & 0 \\ & & \updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & C^0(D^*) & \xrightarrow{\delta} & C^1(D^*) & \xrightarrow{\delta} & C^2(D^*) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Quindi possiamo passare, mediante questi isomorfismi, da $C_i(D^*)$ a $C^i(D^*)$ e, similmente, da $C_i(D)$ a $C^i(D)$.

5.1.3 Prodotti scalari sui gruppi di catene

L'operatore $\star$ ci permette di definire dei prodotti scalari sui gruppi di catene/cocatene. Poniamo:

$$\begin{array}{rccc} (\ ,\ )_i : & C_i(D) \times C_i(D) & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & c_1,\ c_2 & \longmapsto & (c_1, c_2)_i = c_1 \cap \overline{\star c_2}. \end{array}$$

L'applicazione $(\ ,\ )_i$ è trivialmente sesquilineare. E' una diretta conseguenza della definizione dell'operatore $\star$ che vale anche la simmetria a meno di conjugio; l'intersezione è "spostata" da $\star$, ma non viene alterata, cioè

$$c_1 \cap c_2 = \star c_1 \cap \star c_2.$$

Osserviamo anche che $\star$ commuta con il conjugio, in quanto la prima applicazione agisce sui supporti delle catene, mentre la seconda unicamente sui coefficienti. A questo punto:

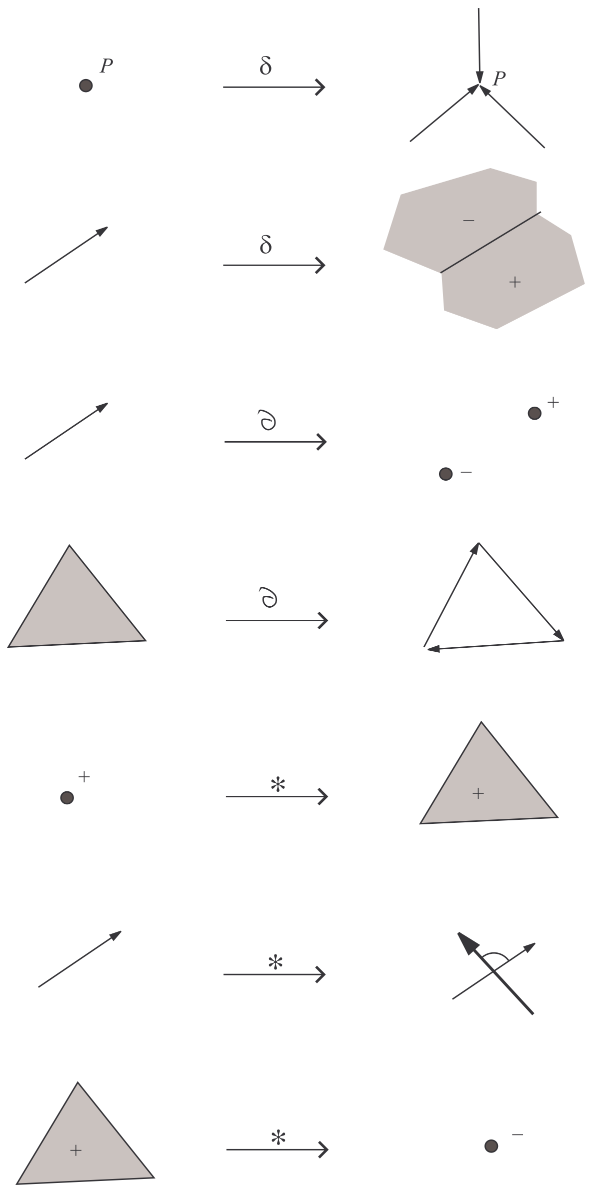
$$(c_1, c_2)_i = c_1 \cap \overline{\star c_2} = \star c_1 \cap \overline{\star\star\, c_2} = \star c_1 \cap -\bar{c}_2 = \bar{c}_2 \cap \star c_1 = \overline{c_2 \cap \overline{\star c_1}} = \overline{(c_2, c_1)}_i.$$

Calcoliamo ora (c, c). Se denotiamo con e_i le catene elementari, $c = \sum \lambda_i e_i,\ \lambda_i \in \mathbb{C}$. Allora

$$(c, c) = \sum_{i,j} \lambda_i \bar{\lambda}_j \ c_i \cap c_j = \sum_i \mid \lambda_i \mid^2 .$$

Quindi $(c, c) \geq 0$ ed è uguale a zero se e solo se $c = 0$.

Tavola riassuntiva con scelte di orientazione



5.2 Le "cocatene armoniche"

Definiamo ora il gruppo $\mathcal{H}^1(D)$ delle *cocatene armoniche.*

$$\mathcal{H}^1(D) := Z^1(D) \cap \star^{-1}(Z^1(D^*))$$

V'è una naturale mappa di projezione $\pi : \mathcal{H}^1(D) \longrightarrow H^1(X_D, \mathbb{C})$.

Teorema 1. *La mappa π è un isomorfismo di gruppi.*

Dimostrazione. Utilizziamo i risultati precedenti riguardo alla possibilità di identificare complessi e complessi duali, catene e cocatene, omomorfismi di bordo e di cobordo, per dimostrare il risultato "con gli apici in basso". Così facendo abbiamo il vantaggio di una migliore visualizzazione di quello che succede. Denotiamo quindi con $\mathcal{H}_1(D) := Z_1(D) \cap \star^{-1}(Z_1(D^*))$ il gruppo delle catene chiuse e $\star$-chiuse, cioè di quei cicli le cui immagini mediante $\star$ rimangono cicli. La nostra tesi è equivalente a dimostrare che la mappa di projezione $\pi : \mathcal{H}_1(D) \longrightarrow H_1(X_D, \mathbb{C})$ è un isomorfismo . Sicuramente questa mappa è un omomorfismo. Bisogna verificarne l'injettività e la surjettività. Ricordiamo che $H_1(X_D, \mathbb{C})$ si realizza come

$$H_1(X_D, \mathbb{C}) = \frac{Z_1(D)}{B_1(D)} = \frac{Z_1(D)}{\partial C_2(D)}.$$

L'isomorfismo $\star$ ci permette di costruire il seguente diagramma, che potrà fornirci una versione equivalente della tesi:

$$\begin{array}{ccc}
Z_1(D) \cap \star^{-1}(Z_1(D^*)) & \stackrel{\pi}{\longrightarrow} & \dfrac{Z_1(D)}{\partial C_2(D)} \\
\star \updownarrow & & \star \updownarrow \\
\star Z_1(D) \cap Z_1(D^*) & \stackrel{\pi'}{\longrightarrow} & \dfrac{\star Z_1(D)}{\star \partial C_2(D) (= \delta \star C_2(D) = \delta C_0(D^*))}
\end{array}$$

Mostreremo che

1. $$Z_1(D^*) \cap \delta C_0(D^*) = 0$$

2. $$Z_1(D^*) + \delta C_0(D^*) = C_1(D^*).$$

Da cui segue la tesi:

Injettività: $\pi' c^* = 0 \Leftrightarrow c^* \in Z_1(D^*) \cap \delta C_0(D^*) \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} c^* = 0.$

Surjettività: $\forall c^* \in \star Z_1(D)(\subseteq C_1(D^*))$ esistono $d^* \in Z_1(D^*), e^* \in C_0(D^*)$ tali che
$$c^* = d^* + \delta e^*.$$
Ovviamente $\delta e^* \in \star Z_1(D)$; quindi $d^* \in (\star Z_1(D) \cap Z_1(D^*))$ e $\pi' d^* = [\ c^*\ ]$.

1.

$$c^* \in Z_1(D^*) \Leftrightarrow \partial c^* = 0.$$
$$c^* \in Im\delta \Leftrightarrow c^* = \delta e.$$

Dobbiamo allora verificare che, per ogni $e \in C_0(D^*)$ tale che $\delta e \neq 0$, allora $\partial\delta e \neq 0$; si tratta cioè di verificare l'injettività della freccia

$$\partial\delta:\ \frac{C_0(D^*)}{Ker\delta} \longrightarrow C_0(D^*).$$

Sfruttando i diagrammi commutativi introdotti precedentemente, possiamo equivalentemente dimostrare l'injettività della freccia

$$\delta\partial:\ \frac{C_2(D)}{Ker\partial} \longrightarrow C_2(D).$$

E' facile vedere che un 1-ciclo che sia un bordo non banale non può cobordare a 0. E' una conseguenza dell' orientabilità della superficie. Si può alternativamente essere un po' più formali utilizzando un approccio diverso, che consiste nell'osservare che ∂_1 e δ_0 possono essere riguardati come operatori aggiunti. Infatti:

$$(\partial c, d) = \partial c \cap \overline{\star d} = c \cap \overline{\partial \star d} = c \cap \overline{\star \delta d} = (c, \delta d).$$

Da cui segue immediatamente $Ker\partial \perp Im\delta$, che è un risultato addirittura più forte di ciò che vogliamo dimostrare.

2.

Sia c una generica catena in $C_1(D^*)$. Voglio mostrare che esiste una catena $e \in C_0(D^*)$ tale che
$$\partial(c - \delta e) = 0,$$
cioè che per ogni $c \in C_1(D^*)$ l'equazione

$$\partial c = \partial\delta x$$

ha soluzione; oppure ancora che la mappa $\partial\delta:\ C_0(D^*) \longrightarrow B_0(D^*)$ è surjettiva.
Lo schema che utilizzeremo è il seguente:

- definiamo un operatore lineare L su $C_0(D^*)$, ponendo $Lx = \partial\delta x$;
- dimostriamo che L è autoaggiunto rispetto al prodotto interno su $C_0(D^*)$ precedentemente introdotto. A questo punto la teoria spettrale ci dice che l'equazione $Lx = c$ ha soluzione se e solo se $c \perp KerL$;
- dimostriamo che tale condizione di ortogonalità è verificata per ogni bordo $b \in B_0(D^*)$.

L è ovviamente lineare in quanto composizione di due operatori lineari. Per quanto riguarda il secondo punto si tratta di fare un po' di conti: $\forall e, f \in C_0(D^*)$

$$(Le, f) = \partial\delta e \cap \overline{\star f} = \delta e \cap \overline{\partial \star f} = \delta e \cap \overline{\star \delta f} = e \cap \overline{\delta \star \delta f} = e \cap \overline{\star \partial \delta f} = (e, Lf).$$

Dobbiamo infine verificare il terzo punto. Sia $k \in KerL$, $b = \partial c \in B_0(D^*)$:

$$(k, b) = k \cap \overline{\star b} = k \cap \overline{\star \partial c} = k \cap \overline{\delta \star c} = \delta k \cap \overline{\star c} = 0.$$

Infatti, poichè $k \in KerL$, $\delta k \in \{Im\delta \cap Ker\partial\} = 0$. E questo conclude il teorema.

Osserviamo che $H^1(X_D, \mathbb{C})$ è naturalmente uguale ad $H^1(X_{D^*}, \mathbb{C})$. Con il precedente teorema abbiamo costruito il seguente diagramma:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H}^1(D) & \longrightarrow & \mathcal{H}^1(D^*) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H^1(X_D, \mathbb{C}) & = & H^1(X_{D^*}, \mathbb{C}). \end{array}$$

Gli operatori $\star_D$ e $\star_{D^*}$ possono anche essere riguardati come isomorfismi di $H^1(X_D, \mathbb{C})$. Naturalmente la loro composizione continuerà a dare $-\mathbb{I}$.

Denotiamo con $\wedge$ il prodotto cup in $H^1(X_D, \mathbb{C})$; ricordiamo che rispetto all'isomorfismo

$$\begin{array}{ccc} H_1(X_D, \mathbb{C}) & \longrightarrow & H^1(X_D, \mathbb{C}) \\ \\ c & \longmapsto & (c \cap \_\,) \end{array}$$

tale prodotto ripropone semplicemente l'intersezione, nel senso che

$$(c_1 \cap \_\,) \wedge (c_2 \cap \_\,) = c_1 \cap c_2.$$

Teorema 2. *L'applicazione sesquilineare*

$$\begin{array}{cccc} (\ ,\ ): & H^1(X_D, \mathbb{C}) \times H^1(X_D, \mathbb{C}) & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ \\ & \alpha, \beta & \longmapsto & (\alpha, \beta) := \alpha \wedge \overline{\star\beta} \end{array}$$

definisce un prodotto scalare su $H^1(X_D, \mathbb{C})$.

Dimostrazione. E' analoga a quella vista per i prodotti interni nei gruppi di catene $C_i(D)$.

Teorema 3. *Consideriamo l'isomorfismo*

$$\star_D : \; H^1(X_D, \mathbb{C}) \longrightarrow H^1(X_D, \mathbb{C}).$$

Denotiamo con $\{\lambda_k \mid k = 1, \cdots, 2g\}$ *l'insieme degli autovalori di* $\star_D$ *e con* L_k *i corrispondenti autospazi. Allora:*

- *ogni autovalore è puramente immaginario;*
- *per ogni* $\lambda \in \{\lambda_k\}$ *anche* -$\lambda \in \{\lambda_k\}$*; i corrispondenti autospazi sono equidimensionali.*

Dimostrazione. Se $\alpha \in H^1(X_D, \mathbb{C}) \setminus \{0\}$, $(\alpha, \alpha) > 0$. Inoltre osserviamo che $\alpha \wedge \bar{\alpha}$ è puramente immaginario, in quanto

$$\overline{\alpha \wedge \bar{\alpha}} = \bar{\alpha} \wedge \alpha = - \; \alpha \wedge \bar{\alpha}.$$

Per un autovettore α tale che $\star\alpha = \lambda\alpha$ abbiamo

$$0 < (\alpha, \alpha) = \alpha \wedge \overline{\star\alpha} = \alpha \wedge \overline{\lambda\alpha} = \bar{\lambda} \; \alpha \wedge \bar{\alpha}.$$

Quindi λ è puramente imaginario.
Ora, se $\star\alpha = \lambda\alpha$, allora $\star\bar{\alpha} = \overline{\star\alpha} = \overline{\lambda\alpha} = \bar{\lambda}\bar{\alpha}$, quindi se α è un autovettore relativo a λ, $\bar{\alpha}$ è un autovettore relativo a $\bar{\lambda} = -\lambda$.

Tutta questa costruzione ha talmente tante analogie con la teoria delle forme armoniche che è sembrato lecito a Shabat e Voevodsky considerare l'operatore $\star_D$ combinatorico come un analogo dell'operatore armonico $\star$ di Hodge. In verità tale parallelo, per come abbiamo definito noi la $\star$ di Hodge nel capitolo 1, va un attimo aggiustato con un conjugio, ma ciò non è troppo difficile. Ricordo che l'operatore armonico $\star$ è stato definito come

$$\star\omega = i\overline{(\omega_1 - \omega_2)}, \quad \text{per } \omega = \omega_1 + \omega_2, \; \omega \in \mathcal{E}^1(X), \omega_1 \in \mathcal{E}^{1,0}(X), \omega_2 \in \mathcal{E}^{0,1}(X).$$

Il prodotto interno sulle forme è stato quindi definito

$$(\omega_1, \omega_2) = \int_X \omega_1 \wedge \star\omega_2.$$

Nel caso combinatorico il prodotto scalare sulle classi di coomologia è definito invece:

$$(\alpha_1, \alpha_2) = \alpha_1 \wedge \overline{\star\alpha_2}.$$

Riteniamo quindi che $\star_D$ sia l'analogo, non proprio di $\star$, ma di "$\star$ meno il conjugio", cioè dell' operatore

$$\tilde{\star}: \ \omega \longmapsto i(\omega_1 - \omega_2).$$

Se chiamiamo $L_D = \oplus_{Im\lambda_k>0} L_k$, otteniamo un sottospazio vettoriale g-dimensionale di $H^1(X_D, \mathbb{C})$; nella nostra costruzione esso è l'analogo dello spazio dei differenziali abeliani immerso all'interno delle forme armoniche. Possiamo quindi definire la Jacobiana approssimata nei due modi equivalenti:

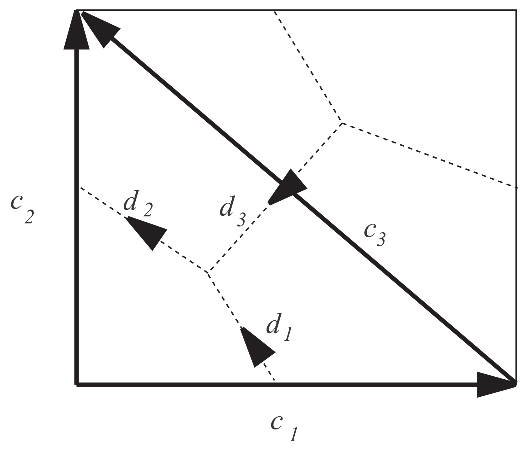
$$\mathcal{J}^D(X_D) := L_D \backslash H^1(X_D, \mathbb{C})/H^1(X_D, \mathbb{Z}),$$

oppure

$$\mathcal{J}^D(X_D) := (L_D)^*/H_1(X_D, \mathbb{Z}).$$

Esempio

Vogliamo ora realizzare concretamente questa costruzione. Scegliamo quindi il più semplice dessin che possa essere significativo:



Immaginiamo i lati opposti del quadrato identificati a costituire, dal punto di vista topologico, un toro. Il dessin è appesantito in nero, mentre il disegno duale è tratteggiato. Sfruttiamo naturalmente tutte le analogie costruite per fare i nostri conti sulle catene, che possiamo "vedere". Iniziamo con il descrivere esplicitamente gli operatori $\star_D$ e $\star_{D^*}$:

$$\begin{array}{lccc} \star_D: & C_1(D) & \longrightarrow & C_1(D^*) \\ & & & \\ & c_1 & \longmapsto & d_1 \\ & c_2 & \longmapsto & d_2 \\ & c_3 & \longmapsto & d_3 \end{array} \qquad \begin{array}{lccc} \star_{D^*}: & C_1(D^*) & \longrightarrow & C_1(D) \\ & & & \\ & d_1 & \longmapsto & -c_1 \\ & d_2 & \longmapsto & -c_2 \\ & d_3 & \longmapsto & -c_3 \end{array}$$

Costruiamo ora i gruppi dei cicli:

$$
\begin{aligned}
Z_1(D) &= <\ c_1,\ c_2,\ c_3\ >_{\mathbb{C}} =\ C_1(D),\\
Z_1(D^*) &= <\ d_1 - d_3,\ -(d_2 + d_3)\ >_{\mathbb{C}}.
\end{aligned}
$$

E delle catene armoniche:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{H}_1(D) &= \star_D^{-1}(Z_1(D^*)) = <\ c_1 - c_3,\ -(c_2 + c_3)\ >_{\mathbb{C}},\\
\mathcal{H}_1(D^*) &= Z_1(D^*) \cap \star_{D^*}^{-1}(Z_1(D)) = <\ d_1 - d_3,\ -(d_2 + d_3)\ >_{\mathbb{C}}\ .
\end{aligned}
$$

Possiamo ora realizzare il seguente diagramma; l'uguaglianza dei due gruppi al livello inferiore è topologica: chiamiamo $\gamma_1,\ \gamma_2$ le classi di omologia rappresentate, rispettivamente, dai cammini $c_1,\ c_2$. Osserviamo che come altri rappresentanti altrettanto legittimi per queste classi abbiamo $-(d_2 + d_3)$ e $d_1 - d_3$.

$$
\begin{array}{ccc}
\mathcal{H}_1(D) & \stackrel{\star_D}{\longleftrightarrow} & \mathcal{H}_1(D^*) \\
\pi \downarrow & & \pi_* \downarrow \\
H_1(X_D, \mathbb{C}) & = & H_1(X_{D_*}, \mathbb{C}) \\
\| & & \| \\
<\ c_1,\ c_2,\ c_3\ >_{\mathbb{C}} / <\ c_1 - c_2 + c_3\ >_{\mathbb{C}} & & <\ \underset{\gamma_2}{\underset{\wr}{d_1 - d_3}},\quad \underset{\gamma_1}{\underset{\wr}{-(d_2 + d_3)}}\ >_{\mathbb{C}}\ \ / <\ 0\ > \\
= & <\ \gamma_1,\ \gamma_2\ >_{\mathbb{C}} & =
\end{array}
$$

Dobbiamo ora calcolare il comportamento dell' operatore $\star_D$ passato al quoziente sui gruppi di omologia. Definiamo, per brevità $A = c_1 - c_3$, $B = -(c_2 + c_3)$, $A' = d_1 - d_3$, $B' = -(d_2 + d_3)$.

$$
\begin{aligned}
\star_D\gamma_1 :\ \gamma_1 &\xrightarrow{\pi^{-1}} (2A - B)/3 \xrightarrow{\star_d} (2A' - B')/3 \xrightarrow{\pi_*} (2\gamma_2 - \gamma_1)/3\\
\star_D\gamma_2 :\ \gamma_2 &\xrightarrow{\pi^{-1}} (A - 2B)/3 \xrightarrow{\star_d} (A' - 2B')/3 \xrightarrow{\pi_*} (\gamma_2 - 2\gamma_1)/3.
\end{aligned}
$$

Nella base $\{\ \gamma_1,\ \gamma_2\ \}$, la matrice rappresentativa di $\star_D$ è:

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ & \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix},$$

i cui autovalori sono $\pm i\frac{\sqrt{3}}{3}$.
Possiamo anche scrivere la matrice del prodotto interno:

$$(\ ,\ ) = \begin{bmatrix} \gamma_1 \wedge \overline{\star\gamma_1} & \gamma_1 \wedge \overline{\star\gamma_2} \\ & \\ \gamma_2 \wedge \overline{\star\gamma_1} & \gamma_2 \wedge \overline{\star\gamma_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ & \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}.$$

E' una matrice reale simmetrica e definita positiva, definisce quindi un prodotto hermitiano quando il vettore applicato a destra viene conjugato.

Infine, l'autospazio L_D relativo all' autovalore $i\frac{\sqrt{3}}{3}$ è generato dal vettore $2\gamma_1 - (1 + i\sqrt{3})\gamma_2$.

Capitolo 6

La convergenza delle Jacobiane approssimate

Introdotte le Jacobiane approssimate, bisogna ora dimostrare che tali strutture meritano il nome che abbiamo conferito loro, cioè che effettivamente approssimano la Jacobiana della curva associata al dessin da cui siamo partiti. Proponiamo ora la dimostrazione effettuata da G.B. Shabat e V. Voevodsky attorno al 1989. E' parso doveroso includerla a conclusione del nostro lavoro, soprattutto perchè l'articolo [SV2] che la contiene non è mai stato pubblicato. Abbiamo cercato di rendere il più chiaro possibile l'esposizione criptica di tale articolo ed abbiamo effettuato molte verifiche ivi omesse. Tale lavoro ci ha portato addirittura a ritenere giusto fare alcune piccole correzioni al testo originale.
E' rimasto purtroppo ancora un ultimo, ma fondamentale, problema aperto, di cui discutiamo estensivamente nel primo paragrafo.

6.1 Il prodotto in [SV2]

Presentiamo immediatamente il nodo irrisolto; il prodotto scalare sulle cocatene in [SV2] è definito diversamente rispetto a come abbiamo fatto nel precedente capitolo seguendo [SV1]. Invece che essere definito in maniera puramente combinatorica, è visto in qualche modo come "pullback" del prodotto sulle forme. Questo prodotto naturalmente agevola la dimostrazione della convergenza, in quanto stabilisce un ponte più diretto con gli enti analitici coinvolti nella costruzione della Jacobiana; ha però lo svantaggio di non essere costruttivo, ma piuttosto trascendente. Che utilità possono avere allora le Jacobiane approssimate se non possono essere realizzate?

Chiaramente, dimostrando l'equivalenza dei due prodotti potremmo sfruttare le caratteristiche positive di entrambi. Una possibile via, che sembra anche abbastanza plausibile, per avere l'equivalenza, consiste nel verificare la commutatività del seguente diagramma,

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{E}^1(X_D) & \stackrel{\star}{\longrightarrow} & \mathcal{E}^1(X_D) \\ {\scriptstyle R}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle R} \\ H^1(X_D,\mathbb{C}) & \stackrel{\star_D}{\longrightarrow} & H^1(X_D,\mathbb{C}) \end{array}$$

laddove R indica la classica mappa di De Rham. Non sappiamo se ciò sia vero, nè se questa sia la strada seguita da Shabat e Voevodsky quando hanno trovato il risultato.

Presentiamo ora più in dettaglio il prodotto che è utilizzato nel corso di questa dimostrazione.

6.1.1 La mappa di Whitney

La mappa di De Rham $R: \ \mathcal{E}^q(X_D) \longrightarrow C^q(D)$ è ben nota. Whitney, in [W], introduce una quasi-inversa di tale mappa, cioè una freccia

$$W^q: \ C^q(D) \longrightarrow L^2(\mathcal{E}^q(X_D))$$

tale che, per ogni cocatena $c \in C^q(D)$, $R(W^q(c)) = c$. In particolare, W^q è una mappa injettiva.

La definizione esplicita della mappa di Whitney richiede l'introduzione della *coordinata baricentrica* b_P. Se P è un vertice del disegno $b_P : X_D \longrightarrow \mathbb{R}$ è la una funzione continua definita unicamente dalle seguente condizioni:

- il supporto di b_P è contentuto nell'unione dei triangoli che hanno un vertice in P;
- $b_P(P) = 1$;
- b_P è lineare quando ristretta sui triangoli.

Con db_P indichiamo la 1-forma corrispondente al differenziale ordinario di b_P dove tale funzione è liscia, a 0 altrove.
La mappa di Whitney $W^q : C^q(D) \longrightarrow L^2(\mathcal{E}^1(X_D))$ è ora definita:

$$W^q(\ (P_0...P_q)\ ) = \sum_{i=0}^{q} (-)^i \ b_{P_i} \ db_{P_1} \wedge \cdots \wedge \widehat{db_{P_i}} \wedge \cdots \wedge db_{P_q}.$$

Definiamo ora il prodotto scalare su $C^1(D)$ ponendo

$$(c_1, c_2) = (W^1(c_1), W^1(c_2)),$$

laddove a destra abbiamo il prodotto scalare delle forme.
Dodziuk in [Do] dimostra che le mappe W^q godono della seguente proprietà:

$$dW^{q-1} = W^q \delta.$$

I prodotti scalari definiscono sui gruppi di cocatene una *decomposizione di Hodge*. Denotiamo con δ_* l'operatore lineare aggiunto a δ. Segue:

$$C^q(D) = Im\delta^{q-1} \oplus Ker\delta^q \cap Ker\delta_*^q \oplus Im\delta_*^{q-1}.$$

La mappa di projezione naturale da $Ker\delta^q \cap Ker\delta_*^q$ realizza un isomorfismo con $H^1(X_D, \mathbb{C})$ e mediante la mappa inversa possiamo definire il prodotto scalare anche su $H^1(X_D, \mathbb{C})$.

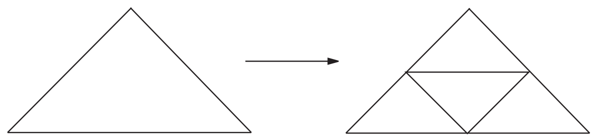
L'operatore $\star_D$ è ora definito come l'unico operatore lineare che "realizza", composto col wedge, tale prodotto, cioè tale che, per ogni $c_1,\ c_2 \in C^1(D)$:

$$(c_1, c_2) = c_1 \wedge \overline{\star_D c_2}.$$

Con questo prodotto e questo operatore $\star_D$ vengono realizzate in [SV2] le Jacobiane approssimate.

6.2 Il raffinamento canonico

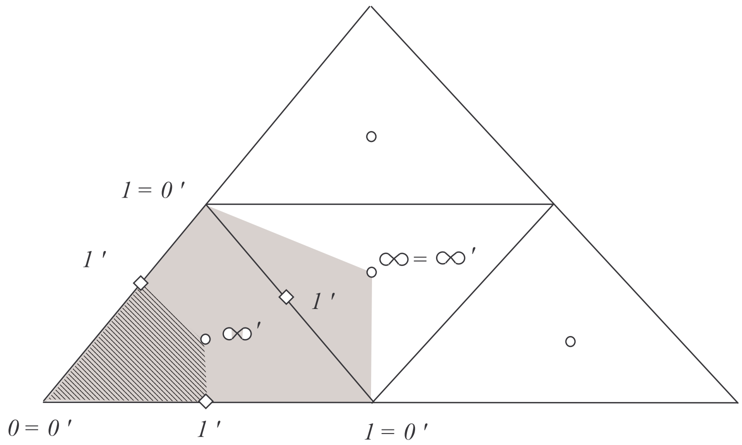
Il *raffinamento canonico* di D è il disegno D' ottenuto introducendo come nuovi vertici i baricentri di ogni lato di D e congiungendo tra loro i nuovi vertici in tutti i modi possibili senza intersecare ulteriormente D. Ogni componente del disegno viene in questo modo suddivisa in quattro nel seguente modo:



Consideriamo ora le coppie di Belyi (X_D, β_D), $(X_{D'}, \beta_{D'})$. Naturalmente i morfismi β_D e $\beta_{D'}$ sono distinti, il secondo trattandosi di un rivestimento ramificato di $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ di ordine quattro volte l'ordine del primo. Le due curve invece sono la stessa curva. Per avere questo risultato è sufficiente mostrare che $\beta_{D'}$ è un morfismo di Belyi sulla curva X_D. Componendo β_D con un'opportuna funzione $\psi : \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ otteniamo un morfismo il cui dessin associato è proprio il disegno raffinato. Il morfismo così ottenuto è quindi $\beta_{D'}$.

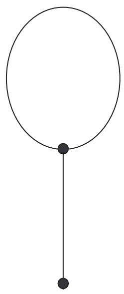
$$\beta_{D'} : \; X_D \xrightarrow{\beta_D} \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \xrightarrow{\psi} \mathbb{P}^1(\mathbb{C}).$$

Cerchiamo ora di capire come deve essere fatto il morfismo ψ. Osserviamo il comportamento della mappa β_D, che leggiamo sulle losanghe del disegno D. Sovrapponendo il disegno raffinato D' ricaviamo le informazioni desiderate:



- ψ è un rivestimento ramificato di ordine quattro;
- $0 \mapsto 0$ come punto semplice,
  $1 \mapsto 0$ come punto triplo;
- $\infty \mapsto \infty$ come punto semplice,
  $R \mapsto \infty$ come punto triplo;
- due punti doppi, P e Q, costituiscono la fibra di 1.

Il dessin associato, che si vede facilmente dopo avere identificato i lati della losanga gialla, è il palloncino:

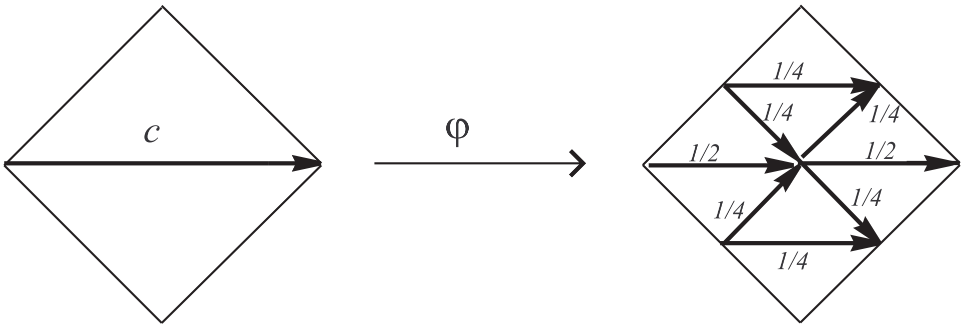


Il morfismo ψ è quello esplicitamente ricavato in sezione 4.6.2.

Dobbiamo ora collegare i gruppi di cocatene dei due disegni. Definiamo la mappa

$$\varphi : \ C^1(D) \longrightarrow C^1(D')$$

in modo che assegni ad una cocatena elementare c la cocatena mostrata nella seguente figura,



La mappa φ gode delle seguenti proprietà:

1. commuta il seguente diagramma:

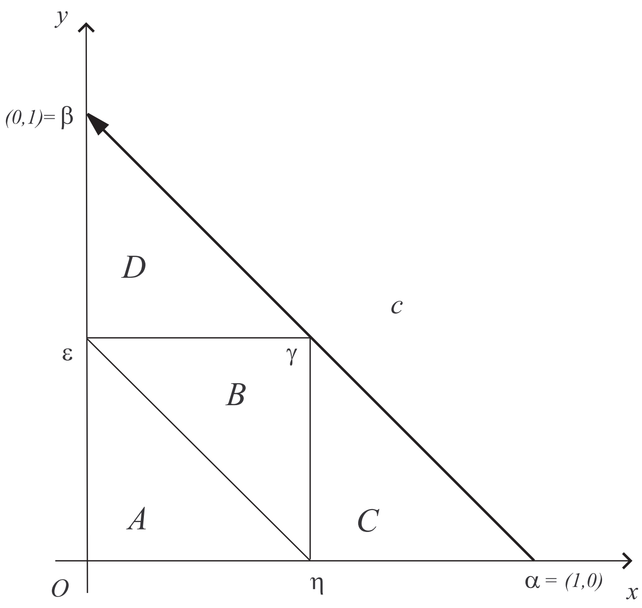
$$\begin{array}{ccc} C^1(D) & \xrightarrow{\varphi} & C^1(D') \\ {\scriptstyle W^1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle W^1} \\ L^2(\mathcal{E}^1(X_D)) & \xrightarrow{i_*} & L^2(\mathcal{E}^1(X_{D'})); \end{array}$$

2. cocicli sono mandati in cocicli;

3. cobordi in cobordi.

1.

Effettuiamo la verifica diretta. Collochiamo il segmento c in posizione "comoda" sul piano, come mostrato nella seguente figura. Data la evidente simmetria sel problema rispetto alla retta contenente c, è sufficiente verificare uno solo dei due triangoli che si appoggiano a c:



Sul simplesso standard $b_\alpha = x$, $b_\beta = y$, quindi

$$W^1(c) = b_\alpha\ db_\beta - b_\beta\ db_\alpha = x\ dy - y\ dx.$$

Calcoliamo ora $W^1(\varphi(c))$ sui vari sottotriangoli:

A

$$\begin{aligned} b_\eta &= 2x, \\ b_\varepsilon &= 2y. \end{aligned}$$

$W^1(\ (\eta\varepsilon)\ ) = b_\eta\ db_\varepsilon - b_\varepsilon\ db_\eta = 4(x\ dy - y\ dx)$. Quindi

$$W^1(\varphi(c))_{|A} = \frac{1}{4} W^1(\ (\eta\varepsilon)\ ) = x\ dy - y\ dx = W^1(c)_{|A}.$$

B

$$\begin{aligned} b_\gamma &= 2(x+y) - 1, \\ b_\eta &= 1 - 2y, \\ b_\varepsilon &= 1 - 2x. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &W^1(\ (\eta\varepsilon)\ ) = b_\eta\ db_\varepsilon - b_\varepsilon\ db_\eta = -2(1-2y)\ dx + 2(1-2x)\ dy, \\ &W^1(\ (\eta\gamma)\ ) = b_\eta\ db_\gamma - b_\gamma\ db_\eta = 2(1-2y)\ dx + 4x\ dy, \\ &W^1(\ (\gamma\varepsilon)\ ) = b_\gamma\ db_\varepsilon - b_\varepsilon\ db_\gamma = -4y\ dx - 2(1-2x)\ dy. \end{aligned}$$

$$W^1(\varphi(c))_{|B} = \frac{1}{4}\{W^1(\ (\eta\varepsilon)\ ) + W^1(\ (\eta\gamma)\ ) + W^1(\ (\gamma\varepsilon)\ )\} = x\ dy - y\ dx = W^1(c)_{|B}.$$

C

$$\begin{aligned} b_\alpha &= 2x-1, \\ b_\gamma &= 2y, \\ b_\eta &= -2(x+y)+2. \end{aligned}$$

$$W^1(\ (\alpha\gamma)\ ) = b_\alpha\ db_\gamma - b_\gamma\ db_\alpha = -4y\ dx - 2(1-2x)\ dy,$$
$$W^1(\ (\eta\gamma)\ ) = b_\eta\ db_\gamma - b_\gamma\ db_\eta = 4y\ dx + 4(1-x)\ dy.$$

$$W^1(\varphi(c))_{|C} = \frac{1}{4}\{2W^1(\ (\alpha\gamma)\ ) + W^1(\ (\eta\gamma)\ )\} = x\ dy - y\ dx = W^1(c)_{|C}.$$

D

$$\begin{aligned} b_\beta &= 2y-1, \\ b_\gamma &= 2x, \\ b_\varepsilon &= -2(x+y)+2. \end{aligned}$$

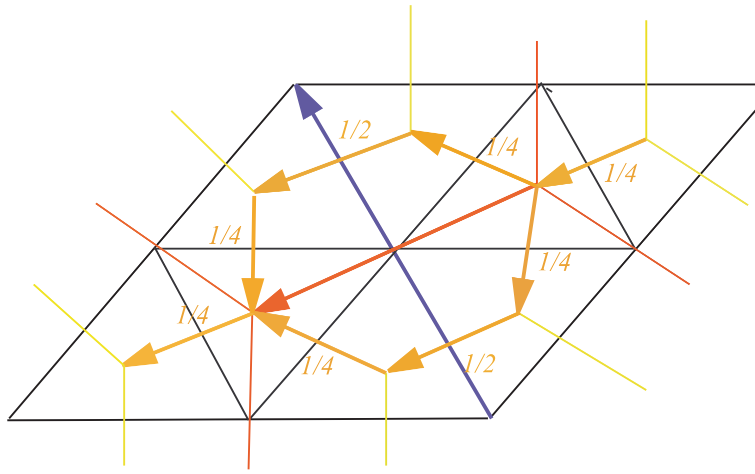
$$W^1(\ (\gamma\beta)\ ) = b_\gamma\ db_\beta - b_\beta\ db_\gamma = -2(2y-1)\ dx + 4x\ dy,$$
$$W^1(\ (\varepsilon\gamma)\ ) = b_\varepsilon\ db_\gamma - b_\gamma\ db_\varepsilon = 4(1-y)\ dx + 4x\ dy.$$

$$W^1(\varphi(c))_{|D} = \frac{1}{4}\{2W^1(\ (\gamma\beta)\ ) - W^1(\ (\varepsilon\gamma)\ )\} = x\ dy - y\ dx = W^1(c)_{|D}.$$

2.

Per verificare queste proprietà ci appoggiamo pesantemente alla dualità costruita nel capitolo precedente. Ricordiamo che una cocatena $c \in C^1(D)$ è un cociclo, cioè $\delta c = 0$, se e solo se l'immagine $\star c \in C^1(D^*)$ è un ciclo, vale a dire $\partial \star c = 0$.

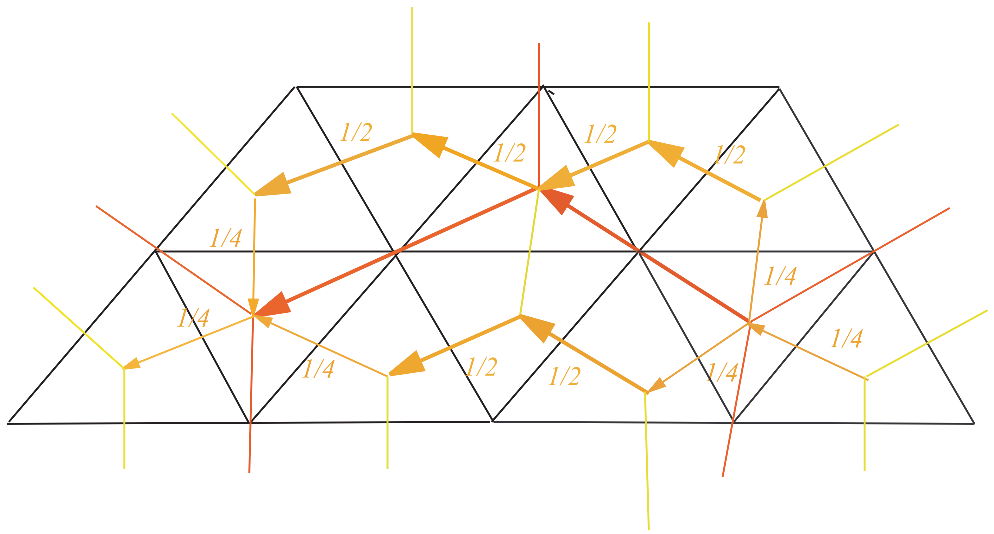
Nel seguente disegno il dessin D ed il suo raffinato D' sono in nero; in rosso è D^*, in giallo $(D')^*$.



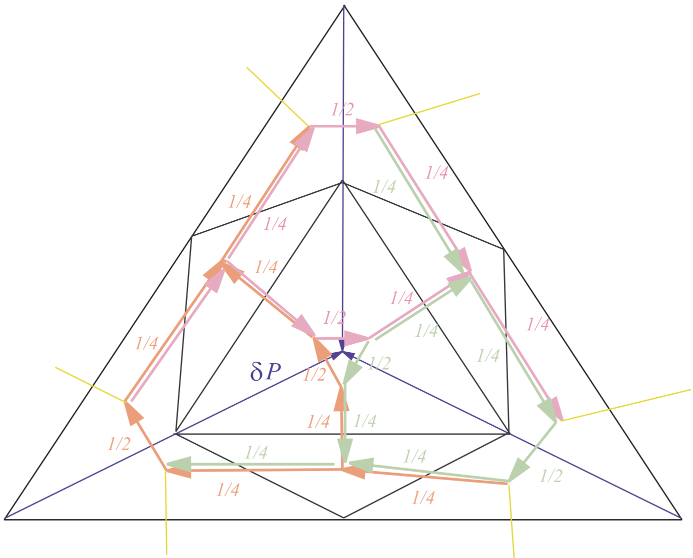
Consideriamo la cocatena elementare e evidenziata in blu. Appesantita in rosso è $\star e$. In arancione abbiamo costruito $\star\varphi(e)$.
Reinterpretiamo la condizione

$$\partial \star c = 0$$

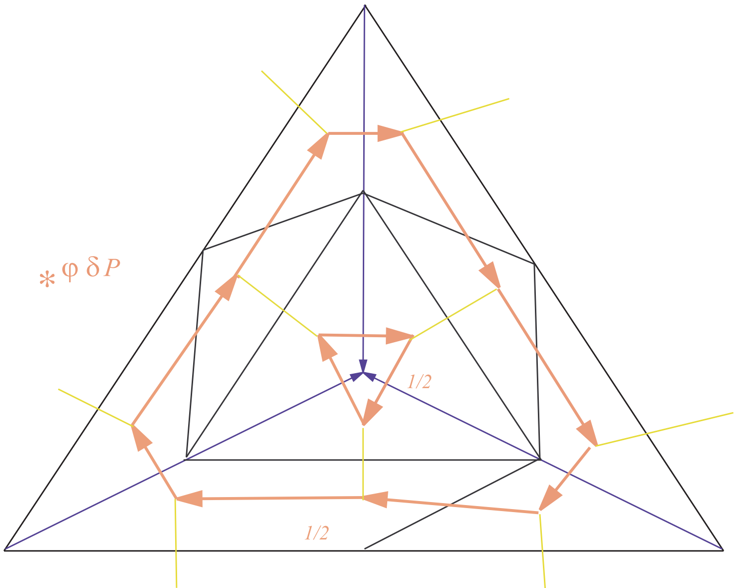
in maniera forse un po' brutale, ma molto comprensibile. Stiamo chiedendo che $\star c$ realizzi un percorso rosso che si chiude. La nostra domanda è: si chiude anche il percorso arancione associato, che chiameremo percorso φ-raffinato? Osserviamo cosa succede se consideriamo due catene rosse consecutive: le componenti dei percorsi raffinati associati a ciascuna di esse un po' si elidono, un po' si sommano, di modo da creare due cammini, che corrono parallelamente a destra ed a sinistra del percorso di partenza, ciascuno con coefficiente $1/2$. Se il percorso rosso si chiude, anche i due arancioni lo fanno. E questa è la nostra tesi.



3.
Utilizziamo tecnica e notazioni analoghe a quelle del punto precedente. E' sufficiente verificare l'affermazione su un cobordo elementare del tipo δP. Per rendere più agevole la lettura del disegno abbiamo omesso di segnare il disegno duale non raffinato. Tutto ciò che non è in nero appartiene al duale del disegno raffinato.



Il ciclo $\star\delta P \in D^*$ è costituito da tre catene elementari. Abbiamo indicato con colori diversi il φ-raffinamento di ciascuna di esse. La scelta di colori diversi serve semplicemente per aiutare a visualizzare distintamente i contributi di ciascuna catena elementare. Nuovamente osserviamo che somme ed elisioni si combinano a creare la seguente situazione:



$\star\varphi\delta P$ è un bordo. Questa affermazione è equivalente, mediante dualità, al fatto che $\varphi\delta P$ sia un cobordo.

6.3 Il teorema di approssimazione

Indicheremo d'ora in poi con nD il disegno ottenuto raffinando D in maniera canonica n volte.

Proposizione 1 (lemma di approssimazione). *L'unione dei sottospazi $W^1(\delta C^0(nD))$, per $n \in \mathbb{N}$ è L^2-densa nella chiusura del sottospazio delle 1-forme esatte su X_D.*

Dimostrazione. Questa proposizione è la riformulazione, nella veste utile ai nostri scopi, del noto fatto che ogni funzione liscia può essere approssimata in L^2 da funzioni lineari a tratti.

Teorema 1. *Sia D un disegno su una superficie topologica X, X_D la curva algebrica associata a D attraverso la corrispondenza di Grothendieck. Allora*

$$\lim_{n\to\infty} \mathcal{J}^{nD}(X_{nD}) = \mathcal{J}(X_D).$$

Dimostrazione. Le Jacobiane approssimate sono definite come $\mathcal{J}^{nD} = (L_{nD})^*/H_1(X_{nD}, \mathbb{Z})$; il primo gruppo di omologia agisce sui differenziali abeliani per integrazione, cioè, se $\gamma \in H_1(X_{nD}, \mathbb{Z})$, $\omega \in \Omega(X_{nD})$, allora $\gamma(\omega) = \int_\gamma \omega$.
Poichè i gruppi di coomologia $H^1(X_{nD}, \mathbb{C})$(risp. $H_1(X_{nD}, \mathbb{Z})$) sono tra loro topologicamente identificabili al variare di n, possiamo anche pensare che tutti gli sapzi L_{nD} approssimanti dei differenziali abeliani giacciono in $H^1(X_D, \mathbb{C})$.
Questo implica che per dimostrare la nostra tesi è sufficiente mostrare che il limite dei sottospazi L_{nD} in $H^1(X_D, \mathbb{C})$ è proprio lo spazio dei differenziali abeliani $\Omega(X_D)$.
Poichè tali spazi sono definiti in termini dei prodotti scalari combinatorici $(\ ,\ )_{nD}$, mentre $\Omega(X_D)$ può essere definito mediante il prodotto scalare delle forme armoniche $(\ ,\ )_{L^2}$, il teorema sarà dimostrato se mostriamo che

$$\lim_{n\to\infty} (\ ,\ )_{nD} = (\ ,\ )_{L^2}.$$

Per definizione, i prodotti scalari combinatorici sono indotti dal prodotto scalare standard in $L^2(\mathcal{E}^1(X_D))$ mediante l'injezione W^1. Sia $\gamma \in H^1(X_D, \mathbb{C})$, denotiamo con $[\ \gamma\ ]_n$ l'elemento corrispondente a tale classe in $\mathcal{H}^1(nD)$; vogliamo dimostrare che $\lim_{n\to\infty} W^1([\ \gamma\ ]_n)$ esiste ed è una forma armonica.
La dimostrazione si articola ora nei seguenti passi:

1. Per ogni $\gamma \in H^1(X_D, \mathbb{C})$

$$W^1([\ \gamma\ ]_n) \in \mathcal{Z}^1(X_D) \cap (W^1(\delta C^0(nD)))^\perp,$$

dove $\mathcal{Z}^1(X_D)$ è la chiusura L^2 dello spazio delle forme chiuse. Questa è una conseguenza della proprietà di commutazione della mappa W^1 che abbiamo precedentemente enunciato. Infatti:

- $dW^1([\ \gamma\ ]_n) = W^1\delta([\ \gamma\ ]_n) = 0$, poichè $[\ \gamma\ ]_n \in Ker\delta$;
- per ogni $\omega = W^1\delta\varepsilon \in W^1\delta C^0(nD)$,

$$(\ W^1([\ \gamma\ ]_n),\ W^1\delta\varepsilon) = (\ [\ \gamma\ ]_n,\ \delta\varepsilon) = 0,$$

  poichè $[\ \gamma\ ]_n \in Ker\delta^*$.

2. $W^1(\delta C^0(nD)) \subset W^1(\delta C^0((n+1)D))$.
La mappa φ precedentemente introdotta realizza l'inclusione di $\delta C^0(nD)$ in $\delta C^0((n+1)D)$, la commutatività di

$$\begin{array}{ccc} C^1(nD) & \xrightarrow{\varphi} & C^1((n+1)D) \\ {\scriptstyle W^1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle W^1} \\ L^2(\mathcal{E}^1(X_D)) & \xrightarrow{i_*} & L^2(\mathcal{E}^1(X_{(n+1)D})). \end{array}$$

porta alla conclusione.
3. $W^1([\ \gamma\ ]_{n+1})$ è la projezione ortogonale di $W^1([\ \gamma\ ]_n)$ su $(W^1(\delta C^0(nD)))^\perp$.
Per verificare ciò è sufficiente notare che

$$W^1([\ \gamma\ ]_{n+1}) - W^1([\ \gamma\ ]_n) = W^1([\ \gamma\ ]_{n+1} - \varphi[\ \gamma\ ]_n) \in W^1(\delta C^0(nD)).$$

Poichè la mappa W^1 injetta, la tesi equivale a mostrare che $\Delta = [\ \gamma\ ]_{n+1} - \varphi[\ \gamma\ ]_n \in \delta C^0((n+1)D)$.
Osserviamo innanzitutto che $\delta\Delta = 0$, poichè $[\ \gamma\ ]_n, [\ \gamma\ ]_{n+1}$ sono cocicli e φ manda cocicli in cocicli.
Ricordiamo inoltre che $C^1((n+1)D)$ si decompone ortogonalmente come

$$C^1((n+1)D) = Im\delta_0\ \oplus\ Ker\delta_1 \cap Ker\delta_1^*\ \oplus\ Im\delta_0^*.$$

Poichè $\delta\Delta = 0$, Δ vive in $Im\delta_0 \oplus Ker\delta_1 \cap Ker\delta_1^*$ e si scrive quindi unicamente come

$$\Delta = \delta\varepsilon + \xi, \qquad \text{con } \xi \in Ker\delta_1 \cap Ker\delta_1^*.$$

Vogliamo mostrare che $\xi = 0$. Tale informazione è contenuta nel seguente diagramma:

$$\begin{array}{ccccc}
L^2(\mathcal{E}^1(X_{nD})) & & \xrightarrow{i_*} & & L^2(\mathcal{E}^1(X_{(n+1)D})) \\
{\scriptstyle W}\uparrow & & & & \downarrow{\scriptstyle R} \\
C^1(nD) & & \xrightarrow{\varphi} & & C^1((n+1)D) \\
{\scriptstyle \pi_n}\downarrow & & & & \downarrow{\scriptstyle \pi_{n+1}} \\
\mathcal{H}^1(nD) & & \longleftrightarrow & & \mathcal{H}^1((n+1)D) \\
& {\scriptstyle p_n}\nwarrow\searrow & & \swarrow\nearrow{\scriptstyle p_{n+1}} & \\
& & H^1(X_D, \mathbb{C}) & &
\end{array}$$

Spieghiamo in parole povere ciò che intendiamo: chiedere $\varphi([\ \gamma\ ]_n) = [\ \gamma\ ]_{n+1} - \delta\varepsilon$ vuol dire chiedere che $\pi_{n+1}\varphi[\ \gamma\ ]_n = [\ \gamma\ ]_{n+1}$. Cioè se partiamo da un elemento $\gamma \in H^1(X_D, \mathbb{C})$ ed effettuiamo lungo il grafico il percorso intermedio (quello comprendente la mappa φ), torniamo infine in $H^1(X_D, \mathbb{C})$ allo stesso elemento. Ma la commutatività del rettangolo superiore ci permette, alternativamente, di "fare il giro esterno", che ovviamente ci riporta all'elemento di partenza, poichè W è la quasi-inversa di R, ed i_* è semplicemente la mappa di restrizione e non altera quindi le forme differenziali.
In formula, ciò che stiamo affermando è:

$$p_{n+1} \circ \pi_{n+1} \circ \varphi \circ \pi_n^{-1} \circ p_n^{-1}(\gamma) = p_{n+1} \circ \pi_{n+1} \circ R \circ i_* \circ W \circ \pi_n^{-1} \circ p_n^{-1}(\gamma) = \gamma.$$

Man mano che n sale noi continuiamo a projettare il nostro punto di partenza su sottospazi inscatolati decrescenti. Vogliamo mostrare che questa procedura infine "incastra" il nostro punto nello spazio delle forme armoniche.

4. Denotiamo con E_n lo spazio $W^1(\delta C^0(nD))$. Gli spazi E_n sono inscatolati e formano una successione crescente al crescere di n. Il lemma di approssimazione ci dice che

$$\overline{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n} = d\mathcal{E}^0(X_D).$$

Ricordiamo che tra le decomposizioni ortogonali che avevamo ottenuto trattando le forme differenziali, vi era anche $\mathcal{Z}^1(X_D) = Harm(X_D) \oplus d\mathcal{E}^0(X_D)$.

Possiamo ora concludere il teorema: la successione $\{W^1([\ \gamma\ ]_n)\}$, costituita da projezioni successive su sottospazi chiusi inscatolati decrescenti, converge per la completezza di $L^2(\mathcal{E}^1(X_D))$; poichè il limite vive nell'ortogonale, in $\mathcal{Z}^1(X_D)$, di tutti gli spazi E_n, esso è un elemento di $Harm(X_D)$.

Bibliografia

[B] Genady V. Belyi. *On Galois extensions of the maximal cyclotomic field.* Izsvestiya An USSR, 1979.

[C] Maurizio Cornalba. *Riemann Roch and Abel's theorem.* Dispensa. Università degli Studi di Pavia.

[D] J. Dodziuk. *Finite-difference approach to the Hodge theory of harmonic forms.* American Journal of Mathematics, 1976.

[F] Otto Forster. *Lectures on Riemann Surfaces.* Springer - Verlag, 1981.

[Fu] William Fulton. *Algebraic Topology. A first course.* Springer - Verlag, 1995.

[G] Robert Gunning. *Lectures on Riemann Surfaces.* Princeton University Press, 1966.

[GH] Philip Griffiths, Joseph Harris. *Principles of Algebraic Geometry.* John Wiley and Sons, 1978.

[Gr] Alexandre Grothendieck. *Esquisse d'un Programme.* Geometric Galois actions. London Mathematical Society, Lecture notes Series 242. Cambridge University Press, 1997.

[K] Czes Kosniowski. *Introduzione alla Topologia Algebrica.* Zanichelli,1988.

[S] Leila Schneps. *The Grothendieck Theory of Dessins d'Enfants.* London Mathematical Society, Lecture notes Series 200. Cambridge University Press, 1994.

[SV1] George B. Shabat, Vladimir Voevodsky. *Drawing curves on number fields.* The Grothendieck Festschrift. Volume III. Birkhauser, 1990.

[SV2] George B. Shabat, Vladimir Voevodsky. *Piecewise Euclidean approximations of Jacobians of algebraic curves.* Preprint, 1989.

[W] H. Whitney. *Geometric integration theory.* Princeton University Press, 1957.