Example Problems (not to be handed in)

Find the inverse Laplace transform

1. $\frac{1}{s-2} \Rightarrow e^{2t}$

2. $\frac{1}{s^2-3s+2} = \frac{1}{s-2} - \frac{1}{s-1} \Rightarrow e^{2t} - e^{t}$

3. $\frac{1}{s(s^2-3s+2)} = \frac{1}{2s} - \frac{1}{s-1} + \frac{1}{2(s-2)} \Rightarrow \frac{1}{2} - e^{t} + \frac{1}{2}e^{2t}$

4. $\frac{1}{s(s^2+1)} = \frac{1}{s} - \frac{s}{s^2+1} \Rightarrow 1 - \cos(t)$

5. $\frac{s}{(s^2+2)(s^2+1)} = \frac{s}{s^2+1} - \frac{s}{s^2+2} \Rightarrow \cos(t) - \cos\left(t\sqrt{2}\right)$

Find the Laplace transform

6. $f(t) = e^{at} - e^{bt} \qquad \hat{f}(s) = \frac{1}{s-a} - \frac{1}{s-b} = \frac{a-b}{(s-a)(s-b)}$

7. $f(t) = a\,e^{at} - b\,e^{bt} \qquad \hat{f}(s) = \frac{a}{s-a} - \frac{b}{s-b} = \frac{(a-b)s}{(s-a)(s-b)}$

8. $f(t) = t \sin 3t \qquad \hat{f}(s) = \frac{6s}{(s^2+9)^2}$

9. $f(t) = \left\{ \begin{array}{ll} 3 & if \;\; 0 < t < 1 \\ 2 & if \;\; 1 < t < 2 \\ 1 & if \;\; 2 < t < 3 \\ 0 & if \;\; 3 < t < \infty \end{array} \right\} \qquad \hat{f}(s) = \frac{3}{s} - \frac{1}{s}e^{-s} - \frac{1}{s}e^{-2s} - \frac{1}{s}e^{-3s}$

10. $f(t) = t\left\{ \begin{array}{ll} 3 & if \;\; 0 < t < 1 \\ 2 & if \;\; 1 < t < 2 \\ 1 & if \;\; 2 < t < 3 \\ 0 & if \;\; 3 < t < \infty \end{array} \right\} \qquad \hat{f}(s) = -\frac{d}{ds}\left(\frac{3}{s} - \frac{1}{s}e^{-s} - \frac{1}{s}e^{-2s} - \frac{1}{s}e^{-3s}\right)$

$$=: -\frac{-3 + e^{-s} + e^{-s}s + e^{-2s} + 2e^{-2s}s + e^{-3s} + 3e^{-3s}s}{s^2}$$

$$\hat{f}(s) = \frac{3}{s^2} - \left(\frac{1}{s}e^{-s} + \frac{1}{s^2}e^{-s}\right) - \left(\frac{1}{s^2}e^{-2s} + \frac{2}{s}e^{-2s}\right) + \left(\frac{1}{s^2}e^{-3s} + \frac{3}{s}e^{-3s}\right)$$