

BAYREUTHER MATHEMATISCHE SCHRIFTEN

---

ISSN 0172-1062

Heft 58, 2000

**Anton Betten**

## **Schnittzahlen von Designs**

---

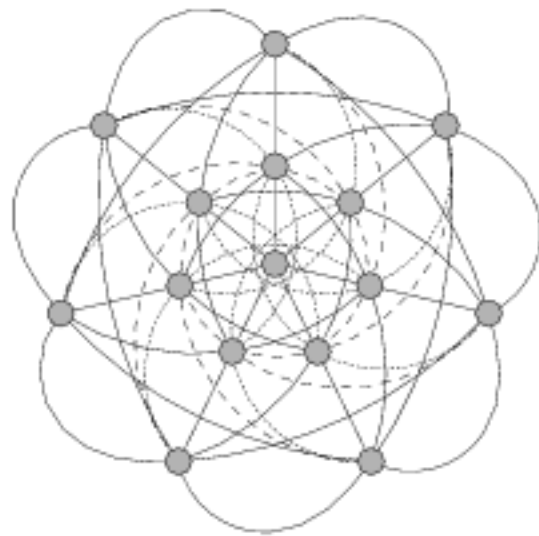
Mathematisches Institut der Universität Bayreuth  
D-95440 Bayreuth, Deutschland

First Printing: February, 2000

Copyright © 2000 by the author

All rights reserved. No part of this publication may be reproduced, stored in a retrieval system, or transmitted, in any form or by any means, electronic, mechanical, photocopying, recording or otherwise, without the prior written permission of the author.

This document was prepared with  $\text{\TeX}$ .  $\text{\TeX}$  is a trademark of the American Mathematical Society.



## Schnittzahlen von Designs

Anton Betten

Adresse des Autors:

Anton Betten  
Universität Bayreuth  
Lehrstuhl II für Mathematik  
95440 Bayreuth  
email: Anton.Betten@uni-bayreuth.de

WWW: <http://www.mathe2.uni-bayreuth.de/betten/anton.html>

Diese Arbeit wurde von der Fakultät für Mathematik und Physik der Universität Bayreuth als Dissertation zur Erlangung des Grades eines Doktors der Naturwissenschaften genehmigt.

D 703

1. Gutachter:	Prof. Dr. A. Kerber
2. Gutachter:	Prof. Dr. R. Laue
Tag der Einreichung:	02.11.1999
Tag des Kolloquiums:	14.02.2000

# Inhaltsverzeichnis

Vorwort . . . . .	v
<b>1 Einführung</b>	<b>1</b>
1.1 Inzidenzstrukturen und $t$ -Designs . . . . .	1
1.2 Parameter von Designs . . . . .	5
1.3 Etwas Kombinatorik von Partitionen . . . . .	11
<b>2 Schnittzahlen von Designs</b>	<b>31</b>
2.1 Gewöhnliche Schnittzahlen . . . . .	32
2.2 Höhere Schnittzahlen . . . . .	34
2.3 Globale Schnittzahlen . . . . .	43
<b>3 Die Konstruktion von Designs</b>	<b>49</b>
3.1 Die Methode von Kramer und Mesner . . . . .	49
3.2 Die Konstruktion von $8$ - $(31, 10, \lambda)$ Designs . . . . .	58
3.3 Liste von $t$ -Designs mit großem $t$ . . . . .	64
<b>4 Der Plesken-Ring</b>	<b>69</b>
4.1 Gruppenoperationen auf Verbänden . . . . .	70
4.2 Der Plesken-Ring . . . . .	79
4.3 Gruppenoperationen auf Verbänden mit Rangfunktion . . . . .	85
4.4 Gruppenoperationen auf dem Verband der Teilmengen . . . . .	93

<b>5</b>	<b>Klassifikation von Designs mittels Schnittzahlen</b>	<b>99</b>
5.1	Die Berechnung von Schnittzahlen . . . . .	99
5.2	Klassifikation der $8-(31, 10, \lambda)$ Designs . . . . .	111
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>123</b>
	<b>Index</b>	<b>127</b>

## Vorwort

In dieser Arbeit beschreibe ich ein Verfahren zur Klassifikation kombinatorischer Designs mittels Schnitzzahlen. Die Methode beruht auf der Theorie der endlichen Gruppenoperationen, insbesondere der Gruppenoperationen auf Verbänden.

Zunächst einige Worte zur Historie und dem Umfeld der Entwicklung an der Universität Bayreuth:

Die Konstruktion von  $t$ -Designs mit großem  $t$  wird durch Vorschreiben einer Automorphismengruppe stark erleichtert. Einem Resultat von Kramer und Mesner zufolge (vgl. [19]) hat man dazu ein ganzzahliges Gleichungssystem zu lösen, worin die Zeilen und Spalten den Bahnen der Gruppe auf den  $t$ - und  $k$ -Teilmengen der gewählten Permutationsgruppe entsprechen. Die Unbekannten sind wahlweise 0 oder 1 und beschreiben eine Auswahl von  $k$ -Bahnen, die durch Vereinigen zu der Blockmenge des Designs gemacht werden.

Dieses Verfahren wurde an der Universität Bayreuth im Rahmen eines von Prof. Dr. R. Laue geleiteten DFG-geförderten Projektes in den letzten Jahren erfolgreich angewendet. Die Anstrengungen mündeten in der Entwicklung eines Programmpaketes DISCRETA [3], welches  $t$ -Designs zu vorgeschriebener Gruppe konstruiert. Die Arbeitsgruppe profitierte von der Mitwirkung von Dr. A. Wassermann, dessen Programm zum Lösen ganzzahliger Gleichungssysteme (vgl. [33]) wesentlich zu Erfolg der Untersuchungen beitrug. Ferner muß erwähnt werden, dass die beschriebene Arbeitsgruppe einen Vorläufer besitzt, denn bereits Anfang der neunziger Jahre hat Dr. B. Schmalz zusammen mit Prof. Dr. R. Laue auf diesem Forschungsgebiet gearbeitet und Schmalz hat mit seiner Dissertation [30] Pionierarbeit geleistet.

Ich selber bin von Herrn Prof. Dr. A. Kerber auf dieses Gebiet gestoßen worden, als wir uns den konstruktiven Anwendungen endlicher Gruppenoperationen zuwendeten (vgl. Kerber [13]). Die Untersuchungen im Rahmen meiner Diplomarbeit waren auch gewissermaßen der Grundstock, aus dem das Paket DISCRETA

im Rahmen einer Gemeinschaftsarbeit hervorgegangen ist.

Konkret gingen meine Arbeiten auf den Hinweis von Herrn Kerber zurück, dass die in der Methode von Kramer und Mesner betrachtete ganzzahlige Matrix mit der von Plesken in seiner Arbeit *Counting with Groups and Rings* [28] betrachteten Theorie der Gruppenoperationen auf Verbänden zusammenhängt.

Es stellte sich heraus, dass die Kramer-Mesner Matrix in der Tat als Spezialfall der von Plesken betrachteten ganzzahligen Matrizen gesehen werden kann, wenn man nämlich den Teilmengenverband und die Bahnen auf  $t$ - und  $k$ -Teilmengen betrachtet. Damit war der Durchbruch zu einem theoretischen Überbau geschafft, der sich später noch als vorteilhaft herausstellen sollte.

Soweit das Umfeld, jetzt zur konkreten Aufgabenstellung:

Im Rahmen der Konstruktion von Designs mit vorgeschriebener Automorphismengruppe stößt man recht bald auf die fundamentale Frage nach der Bestimmung der Isomorphietypen der gefundenen Designs. Um die Schwierigkeit dieses Problems einschätzen zu können, muss man sich klarmachen, dass die betrachteten großen Designs oftmals aus mehreren Millionen von Blöcken bestehen, so dass herkömmliche Ansätze zur Isomorphieklassifikation mittels Backtracking ausscheiden.

Hier nun die Methode, die zur Lösung des Problems herangezogen wird:

Ein nützliches Mittel zur Klassifikation ist die Betrachtung von Invarianten, die in vielen Fällen die Nichtisomorphie von Objekten nachweisen können. Hier bieten sich die Schnittinvarianten an, genauer gesagt die Schnittzahlen von Designs. Diese wurden bereits 1971 von Mendelsohn in [27] betrachtet und sind zu einem wichtigen Bestandteil der Theorie von  $t$ -Designs herangewachsen. Unlängst wurde eine umfassende Arbeit von Tran van Trung et al. [32] veröffentlicht, in der diese Theorie in Richtung von höheren Schnittzahlen weiterentwickelt wurde, wobei höhere Schnittzahlen eine Verallgemeinerung der gewöhnlichen (Mendelsohn'schen) Schnittzahlen sind.



Im Zuge der hier präsentierten Resultate werden zunächst globale Schnitzzahlen von Designs definiert, die eine modifizierte Art höherer Schnitzzahlen sind (vgl. Abschnitt 2.3). Diese globalen Schnitzzahlen dienen als Invarianten der Designs und können zur Klassifikation herangezogen werden. Es zeigt sich in Lemma 2.3.2, dass die Theorie der höheren Schnitzzahlen auch auf globale Schnitzzahlen fortgesetzt werden kann. Nun muss korrekterweise noch erwähnt werden, dass ich aus technischen Gründen zwei verschiedene Arten von globalen Schnitzzahlen betrachte, die ich durch eckige und runde Klammersymbole in der Notation unterscheide. Es stellt sich jedoch heraus, dass beide Versionen in einem gewissen Sinne äquivalent sind. Satz 2.3.1 zeigt, wie man aus der einen Sorte die andere berechnet und umgekehrt auch wieder die ursprünglichen Zahlen zurückbekommen kann. Der Zusammenhang wird durch die Stirling-Zahlen erster und zweiter Art beschrieben, die ich in Abschnitt 1.3 vorstelle, insbesondere die Stirling'sche Inversionsformel, die hier eine Rolle spielt.

Das Klassifikationsproblem läßt sich somit auf folgende zentrale Aufgabe zurückführen, die den Kern der hier präsentierten Arbeit bildet:

*Man berechne die globalen Schnitzzahlen eines Designs, welches zu einer vorgeschriebenen Automorphismengruppe konstruiert worden ist.*

Diese Aufgabe kann erstaunlich einfach gelöst werden. Hierzu kehre ich auf die ursprünglich betrachtete Theorie von Plesken zurück.

Wir untersuchen also die Operation einer Gruppe auf einem endlichen Verband. Die Bahnen der Gruppe können laut Plesken als  $\mathbb{Z}$ -Basen eines Rings hergenommen werden (vgl. Definition 4.2.1). Die Multiplikationskonstanten dieses Rings sind die bereits erwähnten Strukturkonstanten der Gruppenoperation auf dem Verband (vgl. Gleichung (4.2)). Dieser Ring wird von Plesken auf zwei Weisen realisiert: Zunächst bilden die unter der Gruppenoperation invarianten Elemente des ganzzahligen Halbgruppenrings über den Elementen des Verbandes

einen solchen Ring, wie Satz 4.2.2 zeigt. Andererseits (Satz 4.2.3) bilden die Spalten der Matrizen der Strukturkonstanten ebenso eine  $\mathbb{Z}$ -Basis dieses Rings, wobei die Multiplikation das Hadamard-Produkt der Vektoren ist, also die komponentenweise Verknüpfung der Einträge. In Satz 4.2.3 wird der zugehörige Ringisomorphismus vorgestellt.

Beide Realisierungen der Ringe sind wichtig für die nun folgende Anwendung auf die Berechnung von globalen Schnittzahlen von Designs. Die erste Realisierung im Halbgruppenring zeigt die Beziehung zu den Designs und deren Schnittzahlen: Ein Design ist nichts anderes als eine Menge von  $k$ -Teilmengen, und diese Mengen können als formale Summe im Halbgruppenring aufgefaßt werden. Der dazu isomorphe Ring, der mit den Spalten der Matrizen der Strukturkonstanten zusammenhängt, führt auf ein in Satz 5.1.2 beschriebenes einfaches Verfahren zur Berechnung von globalen Schnittzahlen von Designs.

Einige Worte zur Bewertung des Ergebnisses sind angezeigt:

Es zeigt sich, dass man in der erforderlichen Rechnung alleine mit den Bahnen der Gruppe auf den Blöcken des Designs auskommt, also größenordnungsmäßig etwa hundert Eingangsgrößen hat (anstelle von Millionen von Blöcken). In einer abschließenden Überlegung (Korollar 5.1.4) wird gezeigt, dass die hergeleiteten  $k+1$  Gleichungen für die globalen Schnittzahlen in gewisser Weise eine Verallgemeinerung der Aussage von Lemma 2.3.2 über globale Schnittzahlen sind: In den ersten  $t+1$  Gleichungen erhält man nämlich die Gleichungen von Lemma 2.3.2 zurück. Wesentlich sind jedoch die weiteren  $k-t$  Gleichungen, und die Tatsache, dass in Gleichung (5.5) von Satz 5.1.2 der Vektor der globalen Schnittzahlen auf der richtigen Seite steht, und damit direkt berechnet werden kann. Das Ergebnis kann also auch als Auflösung der Gleichungen vom Mendelsohn'schen Typ angesehen werden.

Diese Ergebnisse zeigen insbesondere die Bedeutung der Theorie der Gruppenoperationen für die Anwendungen auf und belegen den enormen Wert der

Plesken'schen Arbeit,

Die beschriebene Matrizen sind in unterschiedlichen Zusammenhängen auch von vielen anderen Autoren betrachtet worden, siehe etwa Kreher [22] und [23] für die Teilmengensituation, Wählt man die triviale Gruppenoperation, so erhält man die Inzidenzmatrizen zwischen  $t$ - und  $k$ -Teilmengen, die auch in der homologischen Algebra eine Rolle spielen. Diese Matrizen sind Gegenstand umfangreicher Untersuchungen, ich nenne hier stellvertretend nur die Arbeiten von H. Krämer (vgl. [20] und [21]).

Wählt man den Untergruppenverband einer Gruppe und betrachtet die Operation der Gruppe durch Konjugation, so kommt man zum Burnside-Ring und seinem Dual. Der Burnsidering spielt eine Rolle bei der Zerlegung von Gruppenoperationen in ihre transitiven Bestandteile, klassifiziert nach Stabilisator-typ. Plesken beschreibt in seiner Arbeit eine Deutung des dualen Burnside-Ringes.

Der von Plesken betrachtete Ring scheint erstmalig bei Wielandt [34] als Zentralisatorring von Permutationsdarstellungen aufzutauchen.

Um die Universalität des Plesken'schen Ansatzes zu würdigen, habe ich mich entschlossen, in dieser Arbeit von Plesken-Matrizen und Plesken-Ringen zu sprechen. Es scheint mir beachtenswert, wie Plesken mit einem ganz allgemeinen Ansatz einen Rahmen für vielfältige, bisher weitgehend unabhängig voneinander betrachtete Theorien schafft.

Ich danke meinen Betreuern Herrn Prof. Dr. A. Kerber und Herrn Prof. Dr. R. Laue. Ferner danke ich allen, die zur Entstehung dieser Arbeit beigetragen haben, sei es durch fachliche Diskussion oder durch Korrekturlesen der vielen Vorabversionen. Ich nenne hier Evi Haberberger, Harald Meyer, Sergey Molodtsov, Alice Niemeyer und Alfred Wassermann.

Ein besonderer Dank geht an Tran van Trung, der mich auf die Arbeit von Bolick [7] aufmerksam gemacht hat, und mit dem es viele anregende Diskussio-

x

nen gab, Schließlich danke ich allen Mitarbeitern und Mitarbeiterinnen des Lehrstuhls II für Mathematik der Universität Bayreuth,

Bayreuth, 2. November 1999

Anton Betten

# Kapitel 1

## Einführung

In diesem Kapitel betrachten wir einige grundlegende Eigenschaften von Designs und ihren Parametern. Als weiterführende Literatur seien die Bücher von van Lint und Wilson [25] sowie von Cameron und van Lint [8] empfohlen. Weitere umfangreiche Werke, die sich ausschließlich mit Designtheorie bzw. Inzidenzstrukturen beschäftigen, sind die Bücher von Beth, Jungnickel und Lenz [2] und der "Klassiker" von Dembowski [10].

### 1.1 Inzidenzstrukturen und $t$ -Designs

Eine *Inzidenzstruktur* ist ein System  $\mathcal{B}$  von Teilmengen einer Menge  $\mathcal{V}$ , deren Elemente *Punkte* genannt werden (der Buchstabe  $\mathcal{V}$  stammt vom englischen Wort *variety*). Die Teilmengen heißen *Blöcke*. Eine Inzidenzstruktur heißt *endlich*, wenn die Menge  $\mathcal{V}$  endlich ist. In dieser Arbeit sind alle Inzidenzstrukturen endlich. Die Anzahl der Punkte wird meist mit dem Buchstaben  $v$  bezeichnet, die Anzahl der Blöcke wird mit  $b$  abgekürzt.

Die *Inzidenzrelation* ist die Inklusionsrelation zwischen Punkten und Blöcken. Wir sagen, dass ein Punkt  $p \in \mathcal{V}$  mit einem Block  $B \in \mathcal{B}$  *inzidiert*, wenn  $p \in B$  gilt. Ein inzidentes Punkt-/Blockpaar  $(p, B)$  heißt *Fahne*. Ein nicht inzi-

denes Punkt-/Blockpaar  $(p, B)$  heißt *Antifahrne*. Die Inklusionsrelation, und damit auch die Inzidenzstruktur selbst, wird häufig in Form einer Matrix codiert, der *Inzidenzmatrix*. Dazu seien  $p_1, \dots, p_v$  die Punkte und  $B_1, \dots, B_b$  die Blöcke der Inzidenzstruktur. Die Inzidenzmatrix ist die  $(v \times b)$ -Matrix  $\mathcal{N} = (n_{i,j})$  mit  $n_{i,j} = 1$  wenn  $p_i \in B_j$  gilt und Null sonst. Andererseits definiert jede 0/1-Matrix  $\mathcal{N} = (n_{i,j})$  vom Format  $v \times b$  eine Inzidenzstruktur  $(\mathcal{V}, \mathcal{B})$  mit  $v$  Punkten und  $b$  Blöcken, wobei die Punkte den Zeilen der Matrix entsprechen und die Blöcke aus den Spalten von  $\mathcal{N}$  hervorgehen. Ein Punkt  $p_i$  ist genau dann in dem Block  $B_j$  enthalten, wenn  $n_{i,j} = 1$  ist.

Ein  $t$ - $(v, k, \lambda)$  *Design* ist eine Inzidenzstruktur  $\mathcal{D} = (\mathcal{V}, \mathcal{B})$  mit

- (i)  $|\mathcal{V}| = v$ ,
- (ii)  $|B| = k$  für jeden Block  $B \in \mathcal{B}$ ,
- (iii) Für jede  $t$ -Teilmenge  $T \subseteq \mathcal{V}$  gibt es genau  $\lambda$  Blöcke aus  $\mathcal{B}$ , die  $T$  umfassen.  
Mit anderen Worten:  $\forall T \in \binom{\mathcal{V}}{t} : \exists \lambda B \in \mathcal{B} : T \subseteq B$ .

Die Zahlen  $t, v, k$  und  $\lambda$  sind (unter anderen) die *Parameter* des Designs. Die Zahl  $t$  beschreibt die *Punktregularität*. Die Zahl  $k$  ist die *Blockgröße*,  $\lambda$  ist der *Index* des Designs. Nicht zu jedem Parameterquadrupel gibt es Designs. Andererseits kann es zu ein und demselben Parametersatz eventuell mehrere Designs geben. Zwei Designs  $\mathcal{D}_1 = (\mathcal{V}, \mathcal{B}_1)$  und  $\mathcal{D}_2 = (\mathcal{V}, \mathcal{B}_2)$  heißen *isomorph*, wenn es eine Abbildung  $\pi \in \text{Sym}_{\mathcal{V}}$  gibt, die das Mengensystem  $\mathcal{B}_1$  in das Mengensystem  $\mathcal{B}_2$  überführt. Dabei ist die Anwendung von  $\pi$  elementeweise zu verstehen, d. h.  $\mathcal{B}_1^\pi = \{B^\pi \mid B \in \mathcal{B}_1\}$  mit  $B^\pi = \{p^\pi \mid p \in B\}$ . Die Isomorphierelation ist eine Äquivalenzrelation. Die Isomorphismen eines Designs auf sich heißen *Automorphismen*. Sie bilden bezüglich Hintereinanderausführung eine Gruppe, die *Automorphismengruppe des Designs*. Ein Design mit  $\lambda = 1$  heißt *Steiner-System*. Weitere Parameter von Designs sind die Anzahl der Blöcke, die einen festen Punkt enthalten. Im Falle einer Punktregularität  $t \geq 1$  ist diese Anzahl unabhängig von

der Auswahl des Punktes. Man bezeichnet diese Größe mit

$$r = |\{B \in \mathcal{B} \mid p \in B\}|$$

für  $p \in \mathcal{V}$ , und nennt sie *Wiederholungsanzahl* (*replication number*).

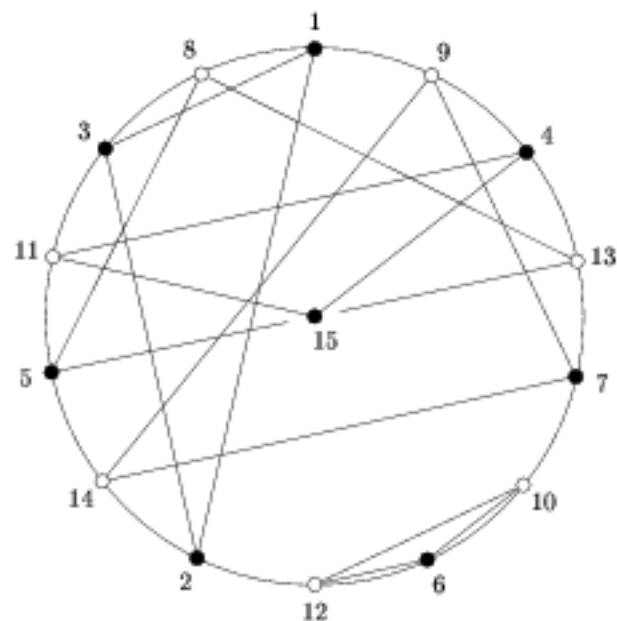
Als Ausgangspunkt der Betrachtung von Designs kann folgendes Schulmädchenproblem angesehen werden, welches Reverend Kirkman (1806-1895) um 1850 in einer Aufgabensammlung veröffentlicht hat (vgl. [14], [16], [15]):

*„Fifteen young ladies in a school walk out three abreast for seven days in succession; it is required to arrange them daily, so that no two will walk twice abreast.“*

Nummeriert man die 15 Schulmädchen mit den Zahlen von 1 bis 15, so gilt es, 7 mal 5 Dreiergruppen aus den Zahlen von 1 bis 15 so festzulegen, dass jeweils alle 15 Zahlen in den 5 Gruppen auftauchen und ferner je zwei Zahlen nicht häufiger als einmal zusammen in einer Dreiergruppe genannt werden. Die notwendige Bedingung  $\binom{15}{2} = 105 \geq 7 \cdot 5 \cdot \binom{3}{2}$  ist mit Gleichheit erfüllt, so dass je zwei Zahlen sogar genau einmal in einer Gruppe zusammenkommen. Demnach liegt ein Design auf 15 Punkten vor, mit Blockgröße 3 und der Eigenschaft, dass je zwei Punkte ( $t = 2$ ) genau einmal ( $\lambda = 1$ ) in einem Block genannt werden. Das Design hat also die Parameter  $2$ -(15, 3, 1) und ist folglich ein Steiner-System.

Eine Lösung des Schulmädchenproblems ist in Abbildung 1.1 aufgezeigt. Einer Idee aus Beth, Jungnickel, Lenz [2] folgend, werden die fünfzehn Mädchen als Knoten mit den Nummern 1 bis 15 identifiziert und auf der Peripherie bzw. im Zentrum eines Kreises angeordnet. Die Dreiergruppen für einen Tag sind als Dreiecke eingezeichnet. Die Lösungen für die anderen 6 Tage ergeben sich durch sukzessive Rotation des Bildes um den Mittelpunkt in Zwischenschritten gegen den Uhrzeigersinn. Man kann die Lösung auch in Tabellenform notieren, dann ergibt sich das darunter aufgeführte Schema.

Es liegt nahe zu fragen, wie man Designs ganz generell konstruieren kann. Dieses Problem besitzt keine universelle Antwort. Ein Verfahren, welches auch



Mo	Di	Mi	Do	Fr	Sa	So
1 2 3	3 6 5	5 7 2	2 4 6	6 1 7	7 3 4	4 5 1
6 10 12	7 13 10	4 9 13	1 8 9	3 11 8	5 14 11	2 12 14
7 9 14	4 8 12	1 11 10	3 14 13	5 12 9	2 10 8	6 13 11
5 8 13	2 11 9	6 14 8	7 12 11	4 10 14	1 13 12	3 9 10
4 11 15	1 14 15	3 12 15	5 10 15	2 13 15	6 9 15	7 8 15

Abbildung 1.1: Eine Lösung des Schulmädchenproblems



mit großen Parametersätzen gut zurecht kommt, wird in dieser Arbeit vorgestellt. Hauptsächlich sind wir hier jedoch an der Beantwortung der zweiten Frage interessiert, die da lautet:

*Gegeben eine Menge von Designs zum selben Parametersatz und auf derselben Punktmenge  $\mathcal{V}$ . Welche dieser Designs sind wesentlich verschieden, mit anderen Worten, welches sind die Äquivalenzklassen isomorpher Designs im Sinne der bereits eingeführten Isomorphierelation?*

## 1.2 Parameter von Designs

In diesem Abschnitt betrachten wir einige Resultate über die Parameter von Designs. Die Aussagen sind allgemein bekannt und können in vielen Kombinatorikbüchern nachgelesen werden.

Ein wichtiges Resultat besagt, dass jedes  $t$ -Design gleichzeitig auch ein  $(t-1)$ -Design ist. Iterativ erhält man, dass es sogar ein  $s$ -Design für alle  $0 \leq s \leq t$  ist:

**1.2.1 Lemma** Sei  $\mathcal{D} = (\mathcal{V}, \mathcal{B})$  ein  $t$ - $(v, k, \lambda)$  Design und  $s$  eine ganze Zahl mit  $0 \leq s \leq t$ . Dann ist  $\mathcal{D}$  gleichzeitig ein  $s$ - $(v, k, \lambda_s)$  Design mit

$$\lambda_s = \lambda \frac{\binom{v-s}{t-s}}{\binom{k-s}{t-s}} \quad (1.1)$$

(d. h.  $\lambda_t = \lambda$ ).

Setzt man  $s = 0$ , so folgt

$$\lambda_0 = \lambda \frac{\binom{v}{t}}{\binom{k}{t}} = b, \quad (1.2)$$

für jedes  $t$ -Design, denn jeder Block enthält die leere Menge.

In jedem 1-Design (bzw. in jedem  $t$ -Design mit  $t \geq 1$ ) ist die Anzahl der Blöcke, die einen beliebigen vorgegebenen Punkt enthalten, eindeutig bestimmt. Man bezeichnet sie mit  $\lambda_1 = r$  und Lemma 1.2.1 liefert:

$$vr = kb \quad \left( \Leftrightarrow \lambda_0 = \lambda_1 \frac{v}{k} \right). \quad (1.3)$$

In jedem 2-Design (bzw. in jedem  $t$ -Design mit  $t \geq 2$ ) hat man

$$\lambda_1 = r = \lambda_2 \frac{\binom{v-1}{2-1}}{\binom{k-1}{2-1}} \quad \left( \Leftrightarrow r(k-1) = \lambda_2(v-1) \right). \quad (1.4)$$

Wird ein  $t$ - $(v, k, \lambda)$  Design  $\mathcal{D}$  als  $(t-1)$ -Design, d. h. genauer als  $(t-1)$ - $(v, k, \lambda_{t-1})$  Design betrachtet, so sprechen wir vom *Design zum reduzierten  $t$*  und schreiben dafür  $\text{red } \mathcal{D}$ . Für  $i \leq t$  ist demnach  $\text{red}^i \mathcal{D} = \underbrace{\text{red red } \dots \text{ red}}_{i \text{ mal}} \mathcal{D}$  ein  $(t-i)$ - $(v, k, \lambda_{t-i})$  Design.

Die Existenz gewisser  $t$ -Designs ist so offensichtlich, dass man diese Designs als *triviale Designs* bezeichnet. Zunächst hat man das *vollständige Design*, welches aus allen  $k$ -Teilmengen von  $\mathcal{V}$  besteht, d. h.  $\mathcal{B} = \binom{\mathcal{V}}{k}$ . Dieses Design hat die Parameter  $t$ - $(v, k, \lambda_{\max}(v, t, k))$  mit

$$\lambda_{\max}(v, t, k) = \binom{v-t}{k-t}.$$

Die Zahl  $\lambda_{\max}(v, t, k)$  ist der größte mögliche Index, den ein Design zu festen Parametern  $t$ ,  $v$  und  $k$  haben kann.

Ein weiteres triviales Design ist das *leere Design* ohne Blöcke. Ferner gibt es das *Ein-Block Design* mit  $k = v$  und  $\lambda = 1$ . Das Design mit  $t = k = 1$  und  $\mathcal{B} = \binom{\mathcal{V}}{1}$  ist ein weiteres triviales Steiner-System. Das Design mit  $k = v - 1$  und  $\mathcal{B} = \binom{\mathcal{V}}{v-1}$  ist ebenfalls trivial. Die letzten drei vorgestellten Designs sind alle vollständig.

Es gibt einige Konstruktionsvorschriften zur Erzeugung neuer  $t$ -Designs aus bereits bekannten  $t$ -Designs. Sei jetzt stets  $\mathcal{D} = (\mathcal{V}, \mathcal{B})$  ein  $t$ - $(v, k, \lambda)$  Design. Das *supplementäre Design*  $\text{supp } \mathcal{D}$  hat genau die  $k$ -Teilmengen als Blöcke, die

nicht zur Blockmenge  $\mathcal{B}$  des Ausgangsdesigns gehören. Die Parameter des supplementären Designs sind

$$t - (v, k, \lambda_{\max}(v, t, k) - \lambda).$$

Da zu jedem Design auch das supplementäre Design mit dem Index  $\lambda_{\max}(v, t, k) - \lambda$  existiert, kann man sich ohne Einschränkung auf die Betrachtung von Designs beschränken, deren Index kleiner oder gleich  $\frac{1}{2}\lambda_{\max}(v, t, k)$  ist. Das supplementäre Design des vollständigen Designs ist das leere Design.

Ein weiteres Design ist das *komplementäre Design*  $\mathcal{D}^c$ , welches als Blöcke die Mengen  $B^c = \mathcal{V} \setminus B$  besitzt, wobei  $B$  die Blöcke von  $\mathcal{D}$  durchläuft. Wir werden später zeigen, dass das komplementäre Design wiederum ein  $t$ -Design ist. Der Index des komplementären Designs wird in Korollar 1.2.6 berechnet. Da das komplementäre Design Blöcke der Größe  $v - k$  hat, kann man sich ohne Einschränkung auf das Studium von Designs mit Blockgröße kleiner oder gleich  $\frac{1}{2}v$  beschränken. Die bereits erwähnten trivialen Designs mit  $t = k = 1$  und  $k = v - 1$  sind zueinander komplementär. Das komplementäre Design des Ein-Block-Designs ist ein Design, welches die leere Menge als einzigen Block besitzt.

Nicht zu jedem Parametersatz existieren wirklich Designs. Ein nützlicher Test, ob ein Parametersatz sinnvoll ist, beruht auf folgender Überlegung:

Wenn ein  $t$ - $(v, k, \lambda)$  Design existiert, dann sind alle Parameter  $\lambda_s$  aus (1.1) ganze Zahlen. Das bedeutet, dass für  $0 \leq s \leq t$  alle Nenner in

$$\lambda_s = \lambda \frac{[v - s]_{t-s}}{[k - s]_{t-s}}$$

in den jeweiligen Zählern (inklusive  $\lambda$ ) aufgehen. Hierbei ist  $[a]_b$  die *fallende Faktorielle* der Länge  $b$ , definiert als

$$[a]_b := a \cdot (a - 1) \cdots (a - (b - 1))$$

(mit  $[a]_0 = 1$ ). Ein Parametersatz  $t$ - $(v, k, \lambda)$  heißt *zulässig*, wenn alle  $\lambda_s$  ganzzahlig sind. Sei  $\Delta\lambda$  die kleinste positive ganze Zahl, so dass

$$\frac{\Delta\lambda \cdot [v - s]_{t-s}}{[k - s]_{t-s}}$$

für alle  $s$  mit  $0 \leq s \leq t$  ganzzahlig ist. Dann sind alle Parametersätze der Form  $t$ - $(v, k, h \cdot \Delta\lambda)$  mit  $h \in \mathbb{N}$  zulässig.

Sei  $\mathcal{D} = (\mathcal{V}, \mathcal{B})$  ein  $t$ - $(v, k, \lambda)$  Design. Für  $p \in \mathcal{V}$  sei

$$\text{der}_p \mathcal{D} = (\mathcal{V} \setminus \{p\}, \mathcal{B}_p) \text{ mit } \mathcal{B}_p = \{B \setminus \{p\} \mid B \in \mathcal{B}, p \in B\}$$

das *abgeleitete Design* (derived design). Sei ferner

$$\text{res}_p \mathcal{D} = (\mathcal{V} \setminus \{p\}, \mathcal{B}^p) \text{ mit } \mathcal{B}^p = \{B \in \mathcal{B} \mid p \notin B\}$$

das *residuelle Design* von  $\mathcal{D}$ .

**1.2.2 Lemma** Sei  $\mathcal{D} = (\mathcal{V}, \mathcal{B})$  ein  $t$ - $(v, k, \lambda)$  Design und sei  $p \in \mathcal{V}$  ein fester Punkt. Dann gilt

(i)  $\text{der}_p \mathcal{D}$  ist ein

$$(t-1) - (v-1, k-1, \lambda)$$

Design,

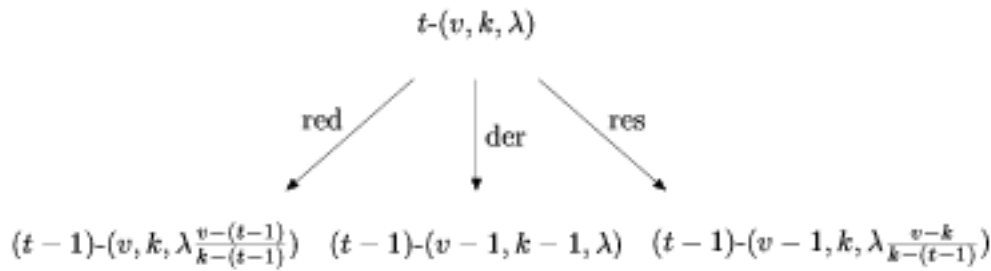
(ii)  $\text{res}_p \mathcal{D}$  ist ein

$$(t-1) - (v-1, k, \lambda_{t-1} - \lambda)$$

Design, mit  $\lambda_{t-1} - \lambda = \lambda \frac{v-k}{k-(t-1)}$ .

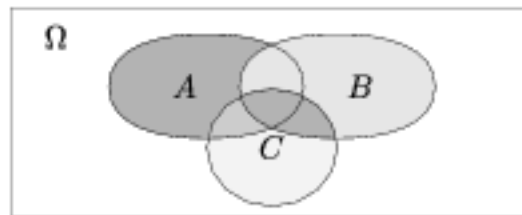
Abbildung 1.2 zeigt den Zusammenhang der Parameter eines Designs mit den Parametern des abgeleiteten bzw. residuellen Designs sowie des Designs zum kleineren  $t$ .

Das folgende Abzählprinzip ist ein wirkungsvolles kombinatorisches Hilfsmittel. Man verdeutlicht es am besten an Hand eines kleinen Beispiels: Sei  $\Omega$  eine endliche Menge und seien  $A, B$  und  $C$  Teilmengen von  $\Omega$ . Angenommen, wir

Abbildung 1.2: Die Parameter der Designs  $\mathcal{D}$  und  $\text{red } \mathcal{D}$ ,  $\text{der } \mathcal{D}$  und  $\text{res } \mathcal{D}$ 

wollten die Kardinalität von  $\hat{\Omega} = \Omega \setminus (A \cup B \cup C)$  berechnen, alleine unter Verwendung der Kardinalitäten der Mengen  $\Omega$  und aller Schnitte von Mengen  $A$ ,  $B$  und  $C$ . Dann hat man (vgl. Abbildung 1.3)

$$|\hat{\Omega}| = |\Omega| - |A| - |B| - |C| + |A \cap B| + |A \cap C| + |B \cap C| - |A \cap B \cap C|.$$

Abbildung 1.3: Berechnung von  $|\hat{\Omega}|$  mittels Inklusion / Exklusion

Der allgemeine Fall gestaltet sich wie folgt:

**1.2.3 Lemma** (Inklusions / Exklusionsprinzip oder Siebformel) Sei  $\Omega$  eine endliche Menge und seien  $A_1, \dots, A_\ell$  Teilmengen von  $\Omega$ . Sei  $\hat{\Omega} = \Omega \setminus \bigcup_{i=1}^{\ell} A_i$ . Dann gilt

$$|\hat{\Omega}| = |\Omega| + \sum_{j=1}^{\ell} (-1)^j \sum_{\substack{M \subseteq \{1, \dots, \ell\} \\ |M|=j}} \left| \bigcap_{k=1}^j A_{m_k} \right|.$$

**1.2.4 Lemma** Sei  $\mathcal{D} = (\mathcal{V}, \mathcal{B})$  ein  $t$ - $(v, k, \lambda)$  Design. Für  $i, j \in \mathbb{N}$  mit  $i + j \leq t$  seien  $I \in \binom{\mathcal{V}}{i}$  und  $J \in \binom{\mathcal{V}}{j}$  disjunkte Teilmengen von  $\mathcal{V}$ . Dann ist die Anzahl

$$\lambda_{i,j} = \left| [B \in \mathcal{B} \mid I \subseteq B, B \cap J = \emptyset] \right|$$

unabhängig von der Wahl der Mengen  $I$  und  $J$  unter den angegebenen Bedingungen. Es gilt  $\lambda_{i,0} = \lambda_i$  für  $i \leq t$  und  $\lambda_{t,0} = \lambda$ . Man hat die Rekursion

$$\lambda_{i,j+1} = \lambda_{i,j} - \lambda_{i+1,j} \quad \text{für } i + j < t. \quad (1.5)$$

Wir stellen die Anzahlen  $\lambda_{i,j}$  für  $i + j \leq t$  in einem dreieckigen Schema wie in Abbildung 1.4 dar. Die Anfangswerte  $\lambda_s = \lambda_{s,0}$  für  $0 \leq s \leq t$  erlauben

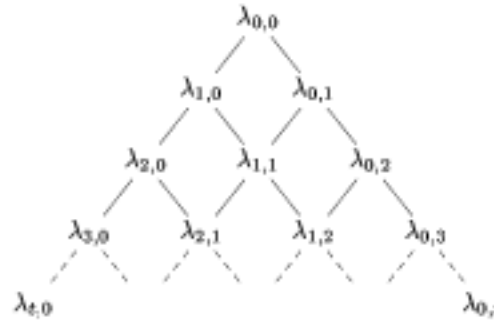


Abbildung 1.4: Die Parameter  $\lambda_{i,j}$  eines  $t$ -Designs

zusammen mit (1.5) die Berechnung aller Werte. Weitere, direkte Formeln sind wie folgt:

**1.2.5 Lemma** Sei  $\mathcal{D} = (\mathcal{V}, \mathcal{B})$  ein  $t$ - $(v, k, \lambda)$  Design. Seien  $I$  und  $J$  disjunkte Teilmengen von  $\mathcal{V}$  der Größe  $i$  bzw.  $j$  und sei  $i + j \leq t$ . Dann gilt

$$(i) \quad \lambda_{0,j} = \sum_{s=0}^j (-1)^j \binom{j}{s} \lambda_s,$$

$$(ii) \quad \lambda_{i,j} = \lambda \frac{\binom{v-i-j}{k-i}}{\binom{v-t}{k-t}} \quad (\text{Ray-Chaudhuri und Wilson [29]}).$$

Als Anwendung dieser Aussage ergibt sich nun das angekündigte Resultat, dass das komplementäre Design eines  $t$ -Designs  $\mathcal{D} = (\mathcal{V}, \mathcal{B})$  wiederum ein  $t$ -Design ist: Sei  $T$  eine beliebige  $t$ -Teilmenge von  $\mathcal{V}$ . Die Blöcke des komplementären Designs, die  $T$  umfassen, sind genau die Komplemente der Blöcke aus  $\mathcal{B}$ , die *keinen* Punkt der Menge  $T$  enthalten, also zu  $T$  disjunkt sind. Demnach gilt:

**1.2.6 Korollar** Sei  $\mathcal{D} = (\mathcal{V}, \mathcal{B})$  ein  $t$ - $(v, k, \lambda)$  Design. Dann ist das komplementäre Design  $\mathcal{D}^c$  ein  $t$ -Design mit den Parametern

$$t - (v, v - k, \lambda_{0,t}) \quad \text{mit} \quad \lambda_{0,t} = \lambda \frac{\binom{v-t}{k}}{\binom{v-t}{k-t}} = \lambda \frac{[v-k]_t}{[k]_t}.$$

### 1.3 Etwas Kombinatorik von Partitionen

In diesem Abschnitt sollen einige Ergebnisse aus der Kombinatorik von Partitionen vorgestellt werden. Das Material zu diesem Abschnitt stammt wesentlich aus den Büchern von Aigner [1], Halder und Heise [11, Kapitel 1, 4 und 5] und Kerber [13].

Sei  $n \in \mathbb{N}$  eine natürliche Zahl ( $0 \in \mathbb{N}$ ) und  $N$  eine  $n$ -elementige Menge. Mit  $(a_1, \dots, a_r)$  bezeichnen wir die *Folge* der Elemente  $a_1, \dots, a_r$ , wohingegen  $[a_1, \dots, a_r]$  die *Multimenge* der Elemente  $a_1, \dots, a_r$  meint. Die Elemente einer Multimenge sind nicht geordnet und werden mit Vielfachheit gezählt. Zur Erleichterung der Schreibweise können Vielfachheiten auch als Exponenten notiert werden. Falls eine Multimenge aus natürlichen Zahlen besteht, ist es nützlich, die Einträge in absteigender Reihenfolge zu notieren. Wir nennen eine Multimenge  $[a_1, \dots, a_r]$  natürlicher Zahlen *in Standardform*, wenn  $a_1 \geq \dots \geq a_r$  gilt.

Eine *Dekomposition* oder *Zerlegung* einer Menge  $N$  ist ein System von eventuell leeren, paarweise disjunkten Mengen  $\mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_r$  mit  $\bigcup_{i=1}^r \mathcal{P}_i = N$ . Wird

das Mengensystem als Folge betrachtet, so heißt die Zerlegung *geordnet*. Ist die Zerlegung eine Multimenge, so nennt man sie *ungeordnet*. In beiden Fällen schreiben wir  $\mathcal{P} \vdash N$ , wobei  $\mathcal{P} = (\mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_r)$  eine Folge bzw.  $\mathcal{P} = [\mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_r]$  eine Multimenge von paarweise disjunkten Teilmengen von  $N$  ist. Formal:

$$\mathcal{P} \vdash N \iff \bigcup_{i=1}^r \mathcal{P}_i = N \wedge \mathcal{P}_i \cap \mathcal{P}_j = \emptyset \text{ für } i \neq j$$

für  $\mathcal{P} = (\mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_r)$  bzw.  $\mathcal{P} = [\mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_r]$ . Die  $\mathcal{P}_i$ , die auch leer sein können, sind die *Teile* der Dekomposition.

### 1.3.1 Beispiel

- (i)  $(2, 7, 1, 2)$  ist die *Folge* und  $[2, 7, 1, 2] = [1, 2^2, 7]$  ist die *Multimenge* der Elemente 2, 7, 1, 2. Da es bei Multimengen nicht auf die Reihenfolge ankommt, gilt  $[2, 7, 1, 2] = [7, 2, 2, 1] = [7, 2^2, 1]$ . Die letzten beiden Formen sind die Standardformen der Multimenge.
- (ii) Die Folge  $(\{2, 3\}, \{1\}, \{4\})$  ist eine geordnete Zerlegung von  $\{1, 2, 3, 4\}$ . Die Multimenge  $[\{2, 3\}, \{1\}, \{4\}]$  ist eine ungeordnete Zerlegung derselben Menge.

◇

Wir kommen nun zur Definition von Partitionen. Es gibt verschiedene Typen von Partitionen, und leider sind die Bezeichnungen in der Literatur nicht immer einheitlich. Eine *Mengenpartition* ist eine Zerlegung.

Eine *Zahlpartition* von  $n \in \mathbb{N}$  ist eine Folge  $p = (p_1, \dots, p_r)$  bzw. eine Multimenge  $p = [p_1, \dots, p_r]$  natürlicher Zahlen  $p_1, \dots, p_r$  mit  $\sum_{i=1}^r p_i = n$ . Die  $p_i$  sind die *Teile* der Partition und wir schreiben auch hier  $p \vdash n$ :

$$p \vdash n \iff \sum_{i=1}^r p_i = n$$



für  $p = (p_1, \dots, p_r)$  bzw.  $p = [p_1, \dots, p_r]$ .

Wir betrachten insgesamt 8 Typen von Partitionen, Abbildung 1.5 gibt einen Überblick über diese. Sie zerfallen in jeweils 4 Mengenpartitionen und 4 Zahlpartitionen, 4 geordnete und 4 ungeordnete Partitionen und schließlich in 4 verallgemeinerte und 4 eigentliche Partitionen. Trägt man die drei Kriterien { Zahl- / Mengenpartition }, { ungeordnete / geordnete Partition } sowie { eigentliche / verallgemeinerte Partition } an den drei aufspannenden Seitenvektoren eines Würfels auf, so ergibt sich Abbildung 1.5.

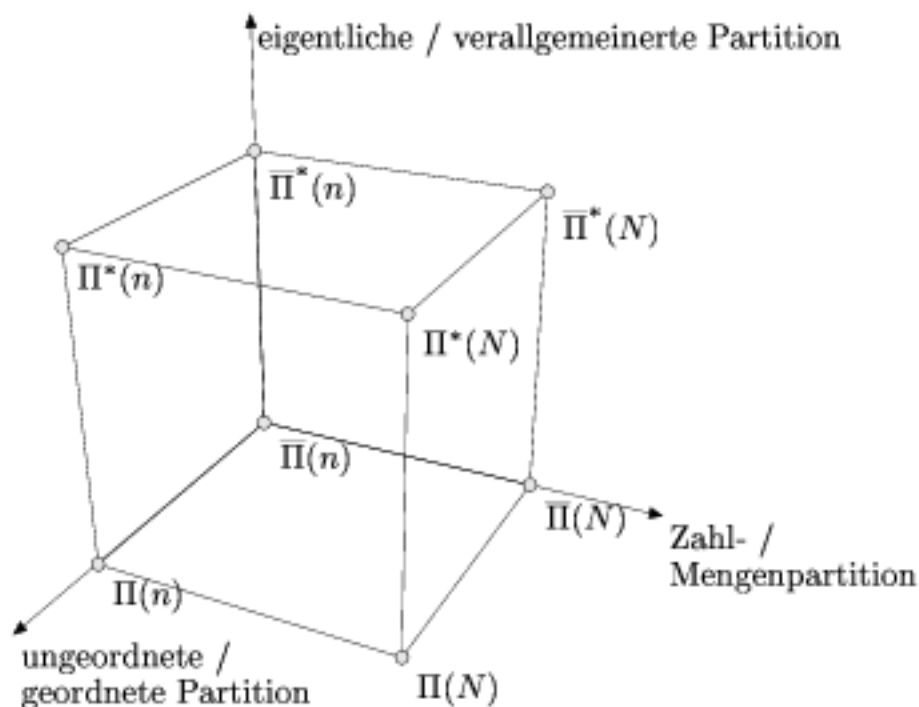


Abbildung 1.5: Die acht Sorten von Partitionen

Eine Zahlpartition  $(p_1, \dots, p_r)$  bzw.  $[p_1, \dots, p_r]$  heißt *eigentlich*, falls  $p_i \geq 1$  für  $i = 1, \dots, r$  gilt. Im Falle  $p_i \geq 0$  spricht man von einer *verallgemeinerten Zahlpartition* (d. h. wir zählen auch die eigentlichen Partitionen zu den verallgemeinerten Zahlpartitionen).

Falls eine Zahlpartition eine Folge ist, so heißt sie *geordnet*. Falls sie eine Multimenge ist, spricht man von einer *ungeordneten* Zahlpartition. Falls die Multimenge in Standardform ist, so soll auch die zugehörige Partition als in Standardform bezeichnet werden. Die Mengen der eigentlichen ungeordneten, der eigentlichen geordneten, der verallgemeinerten ungeordneten und der verallgemeinerten geordneten Zahlpartitionen werden mit  $\overline{\Pi}(n)$ ,  $\Pi(n)$ ,  $\overline{\Pi}^*(n)$  und  $\Pi^*(n)$  bezeichnet. Genauer hat man:

$$\begin{aligned}\overline{\Pi}(n) &= \{ [p_1, \dots, p_r] \vdash n \mid r \in \mathbb{N}, p_i \in \mathbb{N}, p_i \geq 1 \text{ für } i = 1, \dots, r \}, \\ \Pi(n) &= \{ (p_1, \dots, p_r) \vdash n \mid r \in \mathbb{N}, p_i \in \mathbb{N}, p_i \geq 1 \text{ für } i = 1, \dots, r \}, \\ \overline{\Pi}^*(n) &= \{ [p_1, \dots, p_r] \vdash n \mid r \in \mathbb{N}, p_i \in \mathbb{N}, p_i \geq 0 \text{ für } i = 1, \dots, r \}, \\ \Pi^*(n) &= \{ (p_1, \dots, p_r) \vdash n \mid r \in \mathbb{N}, p_i \in \mathbb{N}, p_i \geq 0 \text{ für } i = 1, \dots, r \}.\end{aligned}$$

**1.3.2 Beispiel**  $[2, 4, 2, 1]$  ist aus  $\overline{\Pi}(9)$ ,  $[4, 2, 2, 1]$  ist dieselbe Partition in Standardform.  $(2, 4, 2, 1)$  ist aus  $\Pi(9)$ .  $[2, 4, 2, 0, 1]$  ist aus  $\overline{\Pi}^*(9)$ ,  $[4, 2, 2, 1, 0]$  ist dieselbe Partition in Standardform,  $(2, 4, 2, 0, 1)$  ist aus  $\Pi^*(9)$ .  $\diamond$

Bei Mengenpartitionen hat man ebenso vier Typen. Eine Mengenpartition  $\mathcal{P} = (\mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_r) \vdash N$  bzw.  $\mathcal{P} = [\mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_r] \vdash N$  heißt *eigentlich*, falls  $\mathcal{P}_i \neq \emptyset$  für  $i = 1, \dots, r$  gilt. Eine Mengenpartition, bei der die Teile auch leer sein können, heißt *verallgemeinert*. Insbesondere sind eigentlichen Mengenpartitionen auch verallgemeinerte Partitionen. Die Mengen der eigentlichen ungeordneten, der eigentlichen geordneten, der verallgemeinerten ungeordneten und der verallgemeinerten geordneten Mengenpartitionen sind:

$$\begin{aligned}\overline{\Pi}(N) &:= \{ [\mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_r] \vdash N \mid r \in \mathbb{N}, \mathcal{P}_i \neq \emptyset \text{ für } i = 1, \dots, r \}, \\ \Pi(N) &:= \{ (\mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_r) \vdash N \mid r \in \mathbb{N}, \mathcal{P}_i \neq \emptyset \text{ für } i = 1, \dots, r \}, \\ \overline{\Pi}^*(N) &:= \{ [\mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_r] \vdash N \mid r \in \mathbb{N} \}, \\ \Pi^*(N) &:= \{ (\mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_r) \vdash N \mid r \in \mathbb{N} \}.\end{aligned}$$

**1.3.3 Beispiel**  $\{\{2, 3\}, \{1\}, \{4\}\}$  ist eine ungeordnete Mengenpartition (d. h. aus  $\overline{\Pi}(\{1, 2, 3, 4\})$ ),  $(\{2, 3\}, \{1\}, \{4\})$  ist eine geordnete Mengenpartition (d. h. aus  $\Pi(\{1, 2, 3, 4\})$ ),  $\{\{2, 3\}, \emptyset, \{1\}, \emptyset, \{4\}\}$  ist eine ungeordnete verallgemeinerte Mengenpartition (d. h. aus  $\overline{\Pi}^*(\{1, 2, 3, 4\})$ ),  $(\{2, 3\}, \emptyset, \{1\}, \emptyset, \{4\})$  ist eine geordnete verallgemeinerte Mengenpartition (d. h. aus  $\Pi^*(\{1, 2, 3, 4\})$ ).  $\diamond$

Die *Länge* einer Partition ist die Anzahl ihrer Teile. Wir schreiben  $\ell(p)$  bzw.  $\ell(\mathcal{P})$  für die Länge einer Zahlpartition  $p$  oder die Länge einer Mengenpartition  $\mathcal{P}$ . Die Menge der Partitionen der Länge  $r$  sei mit den bereits eingeführten Symbolen bezeichnet, wobei zusätzlich ein weiterer Index  $r$  angefügt wird. Demnach sind  $\Pi_r(N)$ ,  $\overline{\Pi}_r(N)$ ,  $\Pi_r(n)$  und  $\overline{\Pi}_r(n)$  die Mengenpartitionen von  $N$  (Zahlpartitionen von  $n$ ) mit genau  $r$  Teilen. Die Versionen mit den überstrichenen Partitionssymbolen bezeichnen die ungeordneten Partitionen dieses Typs.

Für eine Zahlpartition  $p$  ist  $|p| := \sum_{i=1}^{\ell(p)} p_i$  das *Gewicht* von  $p$ .

Betrachten wir noch einmal Abbildung 1.5. Für jede der drei Richtungen der Basisvektoren des Würfels kann eine Projektionsabbildung definiert werden. Diese Projektionen laufen jeweils entgegen den Pfeilrichtungen, d. h. geordnete Partitionen werden auf ungeordnete abgebildet, Mengenpartitionen werden auf Zahlpartitionen abgebildet und schließlich werden verallgemeinerte Partitionen auf eigentliche Partitionen abgebildet:

- (i) Jeder geordneten Partition kann eine ungeordnete Partition zugeordnet werden, und zwar diejenige, die sich durch Vergessen der Reihenfolge der Teile ergibt. Wir haben somit zwei Abbildungen

$$\overline{\cdot} : \Pi(N) \rightarrow \overline{\Pi}(N), \mathcal{P} = (\mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_r) \mapsto \overline{\mathcal{P}} = [\mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_r],$$

$$\overline{\cdot} : \Pi(n) \rightarrow \overline{\Pi}(n), p = (p_1, \dots, p_r) \mapsto \overline{p} = [p_1, \dots, p_r].$$

- (ii) Jeder Mengenpartition einer Menge  $N$  läßt sich eine Zahlpartition zuordnen, nämlich die durch die Kardinalitäten der Teile definierte Partition von

$n = |N|$ . Diese Zahlpartition ist genau dann geordnet, wenn bereits die Mengenpartition geordnet gewesen ist. Dies liefert zwei Abbildungen

$$\begin{aligned} \|\cdot\| : \Pi(N) &\rightarrow \Pi(n), \mathcal{P} = (\mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_r) \mapsto (|\mathcal{P}_1|, \dots, |\mathcal{P}_r|), \\ \|\cdot\| : \overline{\Pi}(N) &\rightarrow \overline{\Pi}(n), \mathcal{P} = [\mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_r] \mapsto [|\mathcal{P}_1|, \dots, |\mathcal{P}_r|], \end{aligned}$$

die wir *Typabbildungen* nennen.

- (iii) Jeder verallgemeinerten Partition kann eine eigentliche Partition zugeordnet werden. Bei Mengenpartitionen werden alle leeren Mengen entfernt, bei Zahlpartitionen streicht man Teile der Größe Null, falls die zugehörige Partition geordnet war, so sollen die Teile beim Entfernen aufrücken, d. h. die Anordnung soll unverändert bleiben. Wir haben also Abbildungen

$$\begin{aligned} \hat{\cdot} : \Pi^*(N) &\rightarrow \Pi(N), \mathcal{P} \mapsto \hat{\mathcal{P}}, \\ \hat{\cdot} : \overline{\Pi}^*(N) &\rightarrow \overline{\Pi}(N), \mathcal{P} \mapsto \hat{\mathcal{P}}, \\ \hat{\cdot} : \Pi^*(n) &\rightarrow \Pi(n), p \mapsto \hat{p}, \\ \hat{\cdot} : \overline{\Pi}^*(n) &\rightarrow \overline{\Pi}(n), p \mapsto \hat{p}. \end{aligned}$$

Alle drei Abbildungen spielen für die Beweise der Aussagen dieses Abschnittes eine Rolle.

Mengenpartitionen sind nützlich um Abbildungen endlicher Mengen in andere endliche Mengen zu untersuchen. Jeder Abbildung  $f : N \rightarrow R$  mit  $N = \{1, \dots, n\}$  und  $R = \{1, \dots, r\}$  kann eine Mengenpartition

$$\mathcal{P}_f = (\mathcal{P}_1(f), \dots, \mathcal{P}_r(f)) \tag{1.6}$$

von  $N$  zugeordnet werden. Dazu setzt man

$$\mathcal{P}_i(f) := f^{-1}(\{i\}) \text{ für } i = 1, \dots, r.$$

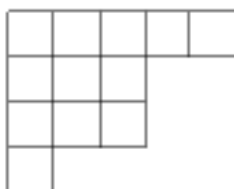
Die geordnete Mengenpartition  $\mathcal{P}_f$  beschreibt die Abbildung  $f$  eindeutig.

**1.3.4 Beispiel** Die Abbildung  $f : \{1, \dots, 4\} \mapsto \{1, \dots, 5\}$  mit  $f(1) = 3$ ,  $f(2) = 1$ ,  $f(3) = 1$ , und  $f(4) = 5$  hat als zugehörige Mengenpartition  $\mathcal{P}_f = (\{2, 3\}, \emptyset, \{1\}, \emptyset, \{4\})$ .  $\diamond$

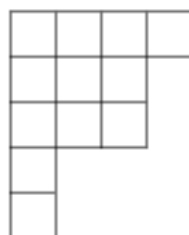
**1.3.5 Bemerkung**  $\mathcal{P}_f$  ist genau dann eigentlich, wenn  $f$  surjektiv ist.

Man kann Abbildungen und zugehörige Mengenpartitionen auch unter der Operation von Gruppen betrachten. Insbesondere bieten sich  $\text{Sym}_N$  und  $\text{Sym}_R$  an. Operiert man mit  $\text{Sym}_R$ , so ist die eben betrachtete Mengenpartition  $\mathcal{P}_f$  als ungeordnete Partition, d. h. als Multimenge aufzufassen. Operiert man mit  $\text{Sym}_N$ , so ist zumindest der Typ der Partition invariant.

Häufig ist es nützlich, Zahlpartitionen in Diagrammform zu zeichnen, dem sogenannten *Ferrers Diagramm*. Sei  $p = [p_1, \dots, p_r]$  eine ungeordnete Zahlpartition in Standardform. Wir zeichnen ein Diagramm mit zeilen- und spaltenweise angeordneten Boxen. Die  $i$ -te Zeile repräsentiert den Teil  $p_i$  und besteht aus  $p_i$  linksbündig angeordneten Boxen. Die Partition  $p = [5, 3, 3, 1]$  etwa hat das Diagramm



Die *konjugierte Partition* erhält man durch spaltenweises Auslesen des Diagramms. Mit anderen Worten, die konjugierte Partition hat als Ferrers Diagramm gerade das an der Hauptdiagonalen transponierte Diagramm. Wir bezeichnen die konjugierte Partition von  $p$  mit  $p'$ . Beispielsweise hat die obige Partition  $p = [5, 3, 3, 1]$  das transponierte Diagramm



woraus man  $p' = [4, 3, 3, 1, 1]$  abliest. Die Länge der konjugierten Partition ist  $p_1$ . Der  $i$ -te Eintrag der konjugierten Partition ist die Anzahl der Teile von  $p$ , die größer oder gleich  $i$  sind:

$$(p')_i = |\{j \leq \ell(p) \mid p_j \geq i\}|.$$

Sei  $a = [a_1, a_2, \dots, a_r]$  eine Partition der Zahl  $n \in \mathbb{N}$ . Der *Multinomialkoeffizient*

$$\binom{n}{a} := \binom{n}{a_1, a_2, \dots, a_r} := \frac{n!}{\prod_{i=1}^r a_i!}$$

ist unabhängig von der Reihenfolge der Teile der Partition  $a$ . Das nächste Lemma zeigt, dass er ganzzahlig ist, denn er beschreibt die Kardinalität einer endlichen Menge.

**1.3.6 Lemma** Sei  $a \in \Pi_r(n)$  und sei  $N$  eine  $n$ -elementige Menge. Die Anzahl der Möglichkeiten, die Menge  $N$  in  $r$  angeordnete Klassen der Größen  $a_1, \dots, a_r$  einzuteilen ist  $\binom{n}{a}$ . Mit anderen Worten,

$$|\{\mathcal{A} \in \Pi_r(N) : \|\mathcal{A}\| = a\}| = \binom{n}{a}.$$

**1.3.7 Beispiel** Die Anzahl der Weisen, das Wort MISSISSIPPI in beliebiger Reihenfolge der Buchstaben zu schreiben beträgt

$$\binom{11}{1, 4, 4, 2} = 34650.$$

◇

Unser nächstes Ziel ist die Bestimmung der Anzahl der Möglichkeiten, eine  $n$ -Menge in nicht angeordnete Klassen von vorgeschriebener Größe einzuteilen.

Sei  $[a_1, a_2, \dots, a_{\ell(a)}] \in \overline{\Pi}(n)$  mit  $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_{\ell(a)}$ . Die geordnete Partition

$$\Delta a := (a_1 - a_2, a_2 - a_3, \dots, a_{\ell(a)-1} - a_{\ell(a)}, a_{\ell(a)}) \in \Pi^*(a_1)$$

heißt *Differenzpartition* von  $a$ .

**1.3.8 Bemerkung** Sei  $a \in \overline{\Pi}(n)$ . Dann gilt

$$(\Delta a')_i = |\{j \leq \ell(a) \mid a_j = i\}|.$$

Die Partition  $\Delta a'$  wird auch der *Zykeltyp* von  $a$  genannt. Es gilt  $|\Delta a'| = \ell(a)$  und  $\sum_{i=1}^{a_1} i \cdot (\Delta a')_i = |a|$ .

**1.3.9 Beispiel** Wir betrachten die Partition  $a = [5, 2, 2, 1]$ . Die konjugierte Partition ist  $a' = [4, 3, 1, 1, 1]$ . Der Zykeltyp ist  $\Delta a' = (1, 2, 0, 0, 1) \in \Pi^*(\ell(a))$ . Man hat  $1 + 2 \cdot 2 + 1 \cdot 5 = 10 = |a|$ .  $\diamond$

**1.3.10 Lemma** Sei  $a \in \overline{\Pi}(n)$  und  $N$  eine  $n$ -elementige Menge. Sei  $r = \ell(a)$ . Die Anzahl der Möglichkeiten, die Menge  $N$  in nicht angeordnete Klassen der Größe  $a_1, a_2, \dots, a_r$  einzuteilen ist

$$\frac{1}{|\Delta a'|!} \cdot \binom{|\Delta a'|}{\Delta a'} \cdot \binom{|a|}{a}.$$

*Beweis:* Nach Lemma 1.3.6 gibt es  $\binom{|a|}{a}$  Mengenpartitionen  $\mathcal{A} = (\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_r)$  von  $N$  mit  $|\mathcal{A}_i| = a_i$ . Dann ist  $\overline{\mathcal{A}} = \{\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_r\}$  eine Mengenpartition mit nicht angeordneten Klassen. Jede Mengenpartition  $\mathcal{A}$  mit  $\|\mathcal{A}\| = a$  hat nach Bemerkung 1.3.8 genau  $(\Delta a')_i$  Klassen der Größe  $i$ . Jede Permutation dieser Klassen untereinander läßt den Typ  $\|\mathcal{A}\|$  der Partition  $\mathcal{A}$  invariant. Alle Mengenpartitionen mit derselben ungeordneten Partition  $\overline{\mathcal{A}}$  ergeben sich durch solche Vertauschungen aus der Partition  $\mathcal{A}$ . Demnach ist die Anzahl der ungeordneten Mengenpartitionen vom Typ  $a$  gleich

$$\frac{1}{\prod_{i=1}^{a_1} (\Delta a')_i!} \cdot \binom{n}{a} = \frac{1}{\ell(a)!} \cdot \binom{|\Delta a'|}{\Delta a'} \cdot \binom{|a|}{a}.$$

□

**1.3.11 Beispiel** (Fortsetzung von Beispiel 1.3.7) Die Anzahl der Weisen, eine 11-elementige Menge in nicht angeordnete Klassen der Größen 4, 4, 2, 1 einzuteilen beträgt

$$\frac{1}{4!} \cdot \binom{4}{1, 1, 2} \cdot \binom{11}{4, 4, 2, 1} = \frac{1}{2!} \cdot \binom{11}{4, 4, 2, 1} = 17325$$

(denn  $a' = [4, 4, 2, 1]' = [4, 3, 2, 2]$  und  $\Delta a' = (1, 1, 0, 2)$ ).  $\diamond$

Häufig möchte man die Gesamtanzahl der Mengenpartitionen einer  $n$ -elementigen Menge in  $r$  Klassen bestimmen (unabhängig vom Typ der Mengenpartition). Hierzu nützt man aus, dass die Abbildung  $\| \cdot \|$  eine ungeordnete Zahlpartition von  $n$  mit genau  $r$  Klassen liefert. Durchläuft man alle solchen Zahlpartitionen, so kann die gewünschte Anzahl der Mengenpartitionen durch Anwenden von Lemma 1.3.10 bestimmt werden:

**1.3.12 Lemma** Die Anzahl der Möglichkeiten, eine  $n$ -elementige Menge  $N$  in  $r$  nicht angeordnete Klassen einzuteilen ist

$$\mathfrak{S}_2(n, r) := \frac{1}{r!} \sum_{a \in \overline{\Pi}_r(n)} \binom{r}{\Delta a'} \binom{n}{a} = |\overline{\Pi}_r(N)|.$$

Diese Anzahl wird Stirling-Zahl zweiter Art genannt.

**1.3.13 Beispiel** Wir wollen exemplarisch  $\mathfrak{S}_2(5, 3)$  berechnen. Es gibt genau zwei Partitionen der Zahl 5 in 3 Teile:  $a = [3, 1, 1]$  und  $b = [2, 2, 1]$ . Die konjugierten Partitionen sind  $a' = [3, 1, 1]$  und  $b' = [3, 2]$ . Man erhält  $\Delta a' = (2, 0, 1)$  und  $\Delta b' = (1, 2)$ . Nach Lemma 1.3.12 ergibt sich

$$\begin{aligned} \mathfrak{S}_2(5, 3) &= \frac{1}{3!} \left( \binom{3}{2, 0, 1} \cdot \binom{5}{3, 1, 1} + \binom{3}{1, 2} \cdot \binom{5}{2, 2, 1} \right) \\ &= \frac{1}{6} \cdot (60 + 90) = 25. \end{aligned}$$

$\diamond$



$n$	$\mathcal{S}_2(n, r), r =$										$B(n)$	
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9		10
0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
2	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	2
3	0	1	3	1	0	0	0	0	0	0	0	5
4	0	1	7	6	1	0	0	0	0	0	0	15
5	0	1	15	25	10	1	0	0	0	0	0	52
6	0	1	31	90	65	15	1	0	0	0	0	203
7	0	1	63	301	350	140	21	1	0	0	0	877
8	0	1	127	966	1701	1050	266	28	1	0	0	4140
9	0	1	255	3025	7770	6951	2646	462	36	1	0	21147
10	0	1	511	9330	34105	42525	22827	5880	750	45	1	115975

Tabelle 1.1: Stirling-Zahlen der zweiten Art  $\mathcal{S}_2(n, r)$  und Bell-Zahlen  $B(n)$ 

Tabelle 1.1 zeigt die Werte von  $\mathcal{S}_2(n, r)$ . Die Zahl  $B(n) = \sum_{r=0}^n \mathcal{S}_2(n, r)$  heißt *Bell-Zahl*.

**1.3.14 Lemma** Die Anzahl der surjektiven Funktionen einer  $n$ -elementigen Menge  $N$  in eine  $r$ -elementige Menge ist

$$r! \cdot \mathcal{S}_2(n, r) = \sum_{a \in \overline{\Pi}_r(n)} \binom{r}{\Delta a'} \binom{n}{a} = \sum_{\substack{a_1 \geq 1, \dots, a_r \geq 1 \\ \sum_{i=1}^r a_i = n}} \binom{n}{a} = |\Pi_r(N)|.$$

*Beweis:* (Vgl. Kerber [13, Seite 81] oder Halder und Heise [11, Beweis von Satz (4.1)]) Seien  $N = \{1, \dots, n\}$  und  $R = \{1, \dots, r\}$  Mengen der Kardinalitäten  $n$  und  $r$ . Jede surjektive Funktion  $f : N \rightarrow R$  definiert nach Bemerkung 1.3.5 eine geordnete eigentliche Mengenpartition  $\mathcal{A}_f$  von  $N$ , deren Teile die Urbildmengen

der Elemente aus  $R$  unter  $f$  sind, Somit ist  $\mathcal{A}_f \in \Pi_r(N)$ . Andererseits ist die surjektive Funktion  $f$  durch die Urbildmengen und damit die geordnete Partition  $\mathcal{A}_f$  eindeutig bestimmt. Es gibt also genau soviele surjektive Funktionen  $f : N \rightarrow R$ , wie es Partitionen in  $\Pi_r(N)$  gibt. Nun bildet  $\tau$  die Partitionen  $\Pi_r(N)$  surjektiv auf  $\overline{\Pi}_r(N)$  ab und jede ungeordnete Partition aus  $\overline{\Pi}_r(N)$  ist das Bild von genau  $r!$  geordneten Partitionen, Es folgt mit Lemma 1.3.12

$$\mathfrak{S}_2(n, r) = |\overline{\Pi}_r(N)| = \frac{1}{r!} |\Pi_r(N)|.$$

Multiplikation mit  $r!$  ergibt die Gleichheit des hintersten und der vorderen beiden Terme der behaupteten Gleichung. Für den dritten Term bemerkt man, dass der Typ der Partition  $\mathcal{A}$  eine geordnete Zahlpartition von  $n$  in  $r$  Teile ist:  $||\mathcal{A}|| = (a_1, \dots, a_r) \in \Pi_r(n)$ ,  $a_1 \geq 1, \dots, a_r \geq 1$  und  $\sum_{i=1}^r a_i = n$ . Zu jedem solchen Typ gibt es nach Lemma 1.3.6 genau  $\binom{n}{a}$  viele geordnete Mengenpartitionen von  $N$ .  $\square$

Wir bezeichnen die Anzahl der (ungeordneten) Zahlpartitionen von  $n$  in  $r$  Teile mit  $P_{n,r}$ . Die Matrix  $(P_{n,r})$  ist eine untere Dreiecksmatrix mit Einsen auf der Diagonalen, Die Gesamtanzahl der Zahlpartitionen von  $n$  ist  $P_n := \sum_{k=1}^n P_{n,k}$ .

**1.3.15 Lemma** *Seien  $r$  und  $n$  natürliche Zahlen mit  $1 \leq r \leq n$  und sei  $N$  eine  $n$ -elementige Menge. Dann gilt*

$$(i) \quad |\Pi_r(N)| = r! \cdot \mathfrak{S}_2(n, r),$$

$$(ii) \quad |\Pi_r^+(N)| = \sum_{k=1}^r \binom{n}{k} \cdot k! \cdot \mathfrak{S}_2(n, k) = r^n,$$

$$(iii) \quad |\overline{\Pi}_r(N)| = \mathfrak{S}_2(n, r),$$

$$(iv) \quad |\overline{\Pi}_r^+(N)| = \sum_{k=1}^r \mathfrak{S}_2(n, k),$$

$$(v) \quad |\Pi_r(n)| = \binom{n-1}{r-1},$$

$$(vi) \quad |\Pi_r^+(n)| = \sum_{k=1}^r \binom{n}{k} \cdot \binom{n-1}{k-1},$$

$$(vii) \quad |\overline{\Pi}_r(n)| = P_{n,r},$$

$$(viii) \quad |\overline{\Pi}_r^*(n)| = \sum_{k=1}^r P_{n,k} = P_n.$$

*Beweis:*

(i) Lemma 1.3.14.

(ii) Jede Partition  $\mathcal{A} \in \Pi_r^*(N)$  besitzt eine gewisse Anzahl, etwa  $k$ , nichtleerer Teile, Vergift man die leeren Teile, so erhält man die eigentliche Partition  $\hat{\mathcal{A}}$  aus  $\Pi_k(N)$ . Zu jeder solchen Partition gibt es genau  $\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$  Weisen,  $n - k$  leere Teile einzufügen, um ein Element aus  $\Pi_r^*(N)$  zu erhalten. Mit (i) folgt

$$|\Pi_r^*(N)| = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} |\Pi_k(N)| = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} \cdot k! \cdot \mathcal{S}_2(n, k).$$

Jede Partition aus  $\Pi_r^*(N)$  kann nach (1.6) durch eine Abbildung  $f : N \rightarrow R = \{1, \dots, r\}$  codiert werden. Da wir verallgemeinerte Partitionen von  $N$  betrachten, ist  $f$  nicht notwendig surjektiv (Bemerkung 1.3.5). Demnach gibt es genau  $r^n$  solche Funktionen und ebenso viele Partitionen.

(iii) Lemma 1.3.12.

(iv) Folgt aus (iii).

(v) Im nichtnegativen Teil  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$  des ganzzahligen Gitters  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  definieren wir zu jeder Partition  $a \in \Pi_r(n)$  einen Weg vom Punkt  $(0, 0)$  zum Punkt  $(r, n)$ . Wir beginnen mit dem Punkt  $P_0 = (0, 0)$ . Für  $i = 1, \dots, r$  definieren wir wechselweise Punkte  $Q_i$  und  $P_i$  durch  $Q_i = (i - 1, \sum_{j=1}^i a_j)$  und  $P_i = (i, \sum_{j=1}^i a_j)$ . Die Folge der Punkte  $P_0, Q_1, P_1, Q_2, \dots, Q_r, P_r$  definiert einen Weg von  $P_0 = (0, 0)$  zum Punkt  $P_r = (r, n)$ . Dieser Weg hat die Gestalt einer Treppe, wobei jedes Punktepaar  $Q_i$  und  $P_i$  zusammen eine Treppenstufe bildet (vgl. Abbildung 1.6). Alle Teile von  $a$  sind größer als

Null, d. h. die Höhen ( $y$ -Koordinaten) der Punkte  $P_i$  steigen streng monoton. Abbildung 1,6 zeigt die Treppe zur Partition  $(1, 2, 1, 1)$ . Projiziert man

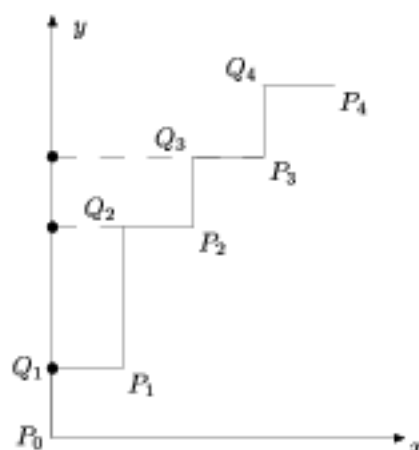


Abbildung 1,6: Die Partition  $(1, 2, 1, 1)$  als Treppe

die  $y$ -Koordinaten der Punkte  $P_1, \dots, P_{r-1}$  auf die  $y$ -Achse, so erhält man eine  $(r-1)$ -Teilmenge der Zahlen  $\{1, \dots, n-1\}$ . Andererseits definiert jede solche Teilmenge genau einen Weg vom Punkt  $(0, 0)$  zum Punkt  $(r, n)$ , der einer streng monoton steigenden Treppe gleicht. Aus diesem Weg kann die Zahlpartition rekonstruiert werden. Damit ist  $|\Pi_r(n)| = \binom{n-1}{r-1}$  gezeigt.

- (vi) Jede  $r$ -Partition  $a \in \Pi_r^*(n)$  mit  $k$  nichtverschwindenden Teilen ergibt durch Weglassen der leeren Teile eine Partition  $\hat{a} \in \Pi_k(n)$ . Jedes  $\hat{a} \in \Pi_k(n)$  kann auf  $\binom{r}{k}$  Weisen von verschiedenen  $a \in \Pi_r^*(n)$  erhalten werden. Damit folgt

$$|\Pi_r^*(n)| = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} |\Pi_k(n)| = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} \binom{n-1}{k-1}.$$

- (vii) Definitionsgemäß gilt  $|\overline{\Pi}_r(n)| = P_{n,r}$ .

- (viii) Weglassen der Nullteile einer verallgemeinerten ungeordneten Partition  $a \in$

$\overline{\Pi}_r^+(n)$  ergibt ein Element von  $\overline{\Pi}_k(n)$  für ein wohlbestimmtes  $k \leq r$ . Demnach gilt  $|\overline{\Pi}_r^+(n)| = \sum_{k=1}^r P_{n,k}$ .

□

**1.3.16 Satz (Multinomialatz)** Seien  $m, n \in \mathbb{N}$ . Im Polynomring  $\mathbb{Z}[x_1, \dots, x_m]$  gilt

$$\begin{aligned} (x_1 + x_2 + \dots + x_m)^n &= \sum_{\substack{a_1 \geq 0, \dots, a_m \geq 0 \\ \sum_{i=1}^m a_i = n}} \binom{n}{a_1, \dots, a_m} x_1^{a_1} x_2^{a_2} \cdots x_m^{a_m} \\ &= \sum_{r=1}^m \sum_{\substack{a_1 \geq 1, \dots, a_r \geq 1 \\ \sum_{i=1}^r a_i = n}} \binom{n}{a_1, \dots, a_r} \sum_{\substack{S \subseteq \{1, \dots, m\} \\ S = \{s_1, \dots, s_r\}}} \prod_{i=1}^r x_{s_i}^{a_i}. \end{aligned}$$

Insbesondere gilt

$$m^n = \sum_{a \in \overline{\Pi}_m^+(n)} \binom{n}{a}.$$

*Beweis:* (Vgl. Halder und Heise [11, Satz (1.19)]) Jeder Term im ausmultiplizierten Produkt  $(x_1 + x_2 + \dots + x_m)^n$  ist ein Wort der Länge  $n$  in den Unbestimmten  $x_1, \dots, x_m$  und jedes solche Wort kommt (bei Beibehaltung der Reihenfolge der Glieder) genau einmal vor. Da die Unbestimmten kommutieren, können wir jedes Wort in Standardform bringen, d. h. in die Form  $x_1^{a_1} x_2^{a_2} \cdots x_m^{a_m}$  mit nichtnegativen ganzen Zahlen  $a_i$ , die  $\sum_{i=1}^m a_i = n$  erfüllen. Demnach ist  $a = (a_1, \dots, a_m) \in \overline{\Pi}_m^+(n)$ . Für festes  $a$  gibt es nach Lemma 1.3.6 genau  $\binom{n}{a}$  Weisen, die Unbestimmten in diesem Wort anzuordnen. Jede dieser Weisen entspricht einem Term beim Ausmultiplizieren des ursprünglichen Ausdrucks. Damit ist die erste Gleichung gezeigt. Im zweiten Ausdruck wurden alle nichtverschwindenden  $a_i$  gesammelt. Die innere Summe verteilt diese Exponenten dann auf die Unbestimmten  $x_1, \dots, x_m$ . □

Wir definieren für  $n \in \mathbb{N}$  die *fallende* und *steigende Faktorielle*:

$$[x]_n := x \cdot (x - 1) \cdots (x - n + 1),$$

$$[x]^n := x \cdot (x + 1) \cdots (x + n - 1),$$

und setzen  $[x]_0 = [x]^0 = 1$ . Die drei Folgen von Polynomen

$$\{x^n \mid n \geq 0\}, \quad \{[x]_n \mid n \geq 0\}, \quad \{[x]^n \mid n \geq 0\}$$

bilden drei verschiedene Basen des Polynomrings über den rationalen Zahlen. Wir wollen einige Eigenschaften der Stirling- und der Bell-Zahlen zusammenstellen:

**1.3.17 Lemma** Seien  $n, k \in \mathbb{N}$ . Dann gilt

$$(i) \quad \mathfrak{S}_2(0, 0) = 1 \text{ und } \mathfrak{S}_2(n, 0) = \mathfrak{S}_2(0, k) = 0 \text{ für } n, k > 0,$$

$$(ii) \quad \mathfrak{S}_2(n + 1, k) = \mathfrak{S}_2(n, k - 1) + k \cdot \mathfrak{S}_2(n, k) \text{ für } n \geq 0 \text{ und } k > 0,$$

$$(iii) \quad \mathfrak{S}_2(n + 1, k) = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \mathfrak{S}_2(j, k - 1) \text{ für } n \geq 0 \text{ und } k > 0.$$

$$(iv) \quad x^n = \sum_{k=0}^n \mathfrak{S}_2(n, k) [x]_k,$$

*Beweis:*

(i) Folgt aus der Definition der Stirling-Zahlen zweiter Art.

(ii) Siehe Halder / Heise [11, Satz (4.3), Seite 57]

(iii) Siehe Halder / Heise [11, Satz (4.4), Seite 57]

(iv) Siehe Halder / Heise [11, Satz (4.1), Seite 56]

□

Die *vorzeichenlosen Stirling-Zahlen der ersten Art* sind für  $n, k \in \mathbb{N}$

$$r(n, k) = |\{g \in \text{Sym}_n \mid c(g) = k\}|,$$

wobei  $c(g)$  die Anzahl der zyklischen Faktoren des Elements  $g \in \text{Sym}_n$  ist, also die Anzahl der Bahnen von  $\langle g \rangle$  auf der Menge  $\{1, \dots, n\}$ .

**1,3,18 Lemma**

(i) Für  $n \geq 0$  und  $k > 0$  gilt die Rekursion

$$r(n+1, k) = r(n, k-1) + n \cdot r(n, k).$$

Die Anfangswerte sind

$$r(0, 0) = 1 \quad \text{und} \quad r(n, 0) = r(0, k) = 0 \quad \text{für} \quad n, k > 0.$$

(ii)

$$r(n, k) = \sum_{a \in \overline{\Pi}_k(n)} \frac{1}{k!} \binom{|\Delta a'|}{\Delta a'} \binom{n}{a} \prod_{i=1}^k (a_i - 1)!.$$

*Beweis:*

(i) Kerber [13, Seite 82].

(ii) Sei  $N = \{1, \dots, n\}$  und sei  $a \in \overline{\Pi}_k(n)$  eine feste Zykelstruktur für ein Element aus  $\text{Sym}_n$  mit genau  $k$  Zyklen. Nach Lemma 1,3,10 ist die Anzahl der Mengenpartitionen  $\mathcal{P}$  von  $N$  mit  $k$  nicht angeordneten Klassen der Größen  $a_i$  für  $a \in \overline{\Pi}_k(n)$  gleich  $\frac{1}{k!} \binom{|\Delta a'|}{\Delta a'} \binom{n}{a}$ . Innerhalb der Klassen von  $\mathcal{P}$  der Größe  $a_i$  können wir die Elemente auf  $(a_i - 1)!$  Weisen zu verschiedenen Zyklen anordnen. Dies beweist die angegebene Formel für die Anzahl der Elemente von  $\text{Sym}_n$  mit  $k$  zyklischen Faktoren.

□

Die Stirling-Zahlen der ersten Art sind

$$\mathfrak{S}_1(n, k) := (-1)^{n+k} \cdot r(n, k).$$

**1.3.19 Satz**

(i) Die Stirling-Zahlen der ersten Art  $\mathfrak{S}_1(n, k)$  genügen für  $k > 0$  und  $n \geq 0$  der Rekursion

$$\mathfrak{S}_1(n+1, k) = \mathfrak{S}_1(n, k-1) - n \cdot \mathfrak{S}_1(n, k).$$

Die Anfangswerte sind

$$\mathfrak{S}_1(0, 0) = 1 \quad \text{und} \quad \mathfrak{S}_1(n, 0) = \mathfrak{S}_1(0, k) = 0 \quad \text{für } n, k > 0.$$

(ii)

$$\mathfrak{S}_1(n, k) = (-1)^{n+k} \sum_{a \in \overline{\Pi}_k(n)} \frac{1}{k!} \binom{|\Delta a'|}{\Delta a'} \binom{n}{a} \prod_{i=1}^k (a_i - 1)!.$$

(iii) Sei  $n \in \mathbb{N}$ . Dann gilt

$$[x]_n = \sum_{k=0}^n \mathfrak{S}_1(n, k) \cdot x^k.$$

(iv) (Stirlings Inversionsformel)

$$\sum_{i=0}^n \mathfrak{S}_1(n, i) \cdot \mathfrak{S}_2(i, k) = \sum_{i=k}^n \mathfrak{S}_1(n, i) \cdot \mathfrak{S}_2(i, k) = \delta_{n,k}.$$

*Beweis:*

(i) Folgt aus Lemma 1.3.18 (i).

(ii) Folgt aus Lemma 1.3.18 (ii).

(iii) (Nach Halder und Heise [11, Satz (5.3)]) Für  $n = 0$  ist die angegebene Gleichung trivialerweise erfüllt. Sei deswegen jetzt  $n > 0$ . Wir setzen



$[x]_n = \sum_{k=0}^n s'(n, k)x^k$  mit unbekanntem Koeffizienten  $s'(n, k)$ . Offensichtlich ist  $s'(n, k) = 0 = \mathfrak{S}_1(n, k)$  für  $k > n$ . Im Falle  $n > 0$  sind die konstanten Terme von  $[x]_{n+1}$  und  $[x]_n$  Null, und somit  $s'(n+1, 0) = s'(n, 0) = \mathfrak{S}_1(n, 0) = 0$ . Nun gilt

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} s'(n+1, k)x^k &= [x]_{n+1} \\ &= (x-n) \cdot [x]_n \\ &= \sum_{k=0}^n s'(n, k)x^{k+1} - \sum_{k=1}^n n \cdot s'(n, k)x^k \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} s'(n, k-1)x^k - \sum_{k=1}^{n+1} n \cdot s'(n, k)x^k \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} (s'(n, k-1) - n \cdot s'(n, k))x^k. \end{aligned}$$

Vergleich der Koeffizienten auf beiden Seiten dieser Gleichung zeigt, dass die  $s'(n, k)$  derselben Rekursion wie die  $\mathfrak{S}_1(n, k)$  genügen. Da auch die Anfangswerte mit denen von  $\mathfrak{S}_1(n, k)$  übereinstimmen, folgt  $s'(n, k) = \mathfrak{S}_1(n, k)$  für alle  $n, k \in \mathbb{N}$ .

- (iv) (Nach Halder und Heise [11, Satz (5.4)]) Nach Lemma 1.3.17 (iv) gilt  $x^n = \sum_{k=0}^n \mathfrak{S}_2(n, k)[x]_k$  für  $n \in \mathbb{N}$ . Mit (iii) folgt, dass die Matrizen  $(\mathfrak{S}_1(n, k))$  und  $(\mathfrak{S}_2(n, k))$  zueinander invers sind. Zusammen mit der Tatsache, dass beide Matrizen untere Dreiecksmatrizen sind, beweist dies alle angegebenen Gleichungen.

□

Tabelle 1.2 zeigt die Stirling-Zahlen der ersten Art für kleine  $n$  und  $k$ .

Das folgende nützliche Resultat findet man ebenfalls im Buch von Aigner [1]. Wir benötigen es später. Es sei an dieser Stelle bereits erwähnt, auch wenn es nichts mit Partitionen zu tun hat.

$n$	$\mathcal{S}_1(n, k), k =$								
	0	1	2	3	4	5	6	7	8 9
0	1	0	0	0	0	0	0	0	0 0
1	0	1	0	0	0	0	0	0	0 0
2	0	-1	1	0	0	0	0	0	0 0
3	0	2	-3	1	0	0	0	0	0 0
4	0	-6	11	-6	1	0	0	0	0 0
5	0	24	-50	35	-10	1	0	0	0 0
6	0	-120	274	-225	85	-15	1	0	0 0
7	0	720	-1764	1624	-735	175	-21	1	0 0
8	0	-5040	13068	-13132	6769	-1960	322	-28	1 0
9	0	40320	-109584	118124	-67284	22449	-4536	546	-36 1

Tabelle 1.2: Stirling-Zahlen der ersten Art  $\mathcal{S}_1(n, k)$ 

**1.3.20 Lemma** Sei  $\mathcal{B} = (b_{i,j})$  mit  $b_{i,j} = \binom{i}{j}$  für  $0 \leq i, j \leq n$  die Matrix der Binomialkoeffizienten. Dann hat die inverse Matrix  $\mathcal{B}^{-1} = (b'_{i,j})$  die Koeffizienten  $b'_{i,j} = (-1)^{i+j} \binom{i}{j}$  für  $0 \leq i, j \leq n$ .

# Kapitel 2

## Schnittzahlen von Designs

In diesem Kapitel wird die Theorie der Schnittzahlen von Designs vorgestellt. Abschnitt 2.1 beschäftigt sich mit gewöhnlichen Schnittzahlen, wobei die Ergebnisse von Mendelsohn (Satz 2.1.1) und Köhler (Satz 2.1.2) vorgestellt werden. Die in letzterem Satz vorgestellten Köhler'schen Gleichungen dienen unter anderem dem Nachweis der Nichtexistenz von Designs zu gewissen Parametersätzen. Die berühmte (in dieser Arbeit nicht weiter behandelte) *Linear-Programming-Bound* von Delsarte wird von diesen Gleichungen hergeleitet, und zwar durch Verknüpfung der Gleichungen mit einem linearen Optimierungsproblem. Eine präzise Darstellung dieser Methode findet sich z. B. in Bolick [7].

In Abschnitt 2.2 werden höhere Schnittzahlen von Designs behandelt. Die Ergebnisse von Mendelsohn und Köhler lassen sich auf höhere Schnittzahlen fortsetzen, wobei die Gleichungen jeweils nur leichte Modifikationen erfahren. Diese Resultate stammen von Tran van Trung et al. [32].

In Abschnitt 2.3 betrachten wir eine modifizierte Version der höheren Schnittzahlen, die globalen Schnittzahlen von Designs. Diese haben den Vorteil, dass sie das gesamte Design widerspiegeln, und damit zur Klassifikation herangezogen werden können. Aus technischen Gründen betrachten wir zwei verschiedene Sorten globaler Schnittzahlen, die jedoch äquivalent in dem Sinne sind, dass die eine

Sorte von Zahlen leicht aus der anderen berechnet werden kann und umgekehrt. Der Zusammenhang beider Zahlen wird wesentlich durch die Stirling-Zahlen erster und zweiter Art beschrieben.

## 2.1 Gewöhnliche Schnittzahlen

Schnittzahlen von Designs werden bereits von Mendelsohn in seiner 1971 erschienenen Arbeit [27] behandelt. Wir betrachten in diesem Abschnitt zwei fundamentale Ergebnisse von Mendelsohn und Köhler.

Sei  $\mathcal{D} = (\mathcal{V}, \mathcal{B})$  ein  $t$ -Design und  $M \subseteq \mathcal{V}$  mit  $|M| = m$ . Sei

$$\alpha_i(M) = \left| \{ B \in \mathcal{B} : |B \cap M| = i \} \right|$$

die Anzahl der Blöcke des Designs, die  $M$  in genau  $i$  Punkten schneiden. Wir nennen  $\alpha_i(M)$  die  $i$ -te Schnittzahl von  $M$  mit  $\mathcal{D}$ . Der Vektor

$$\alpha(M) = (\alpha_0(M), \alpha_1(M), \dots, \alpha_m(M))$$

ist der Schnitttyp von  $M$  mit  $\mathcal{D}$ . Ist  $M$  eine  $k$ -Teilmenge von  $\mathcal{V}$ , so ist  $\alpha_k(M) = 1$  gleichbedeutend mit  $M = B_0 \in \mathcal{B}$ . In diesem Fall heißt  $\alpha_i(B_0)$   $i$ -te Block-Schnittzahl von  $B_0$  und  $\alpha(B_0)$  ist der Block-Schnitttyp von  $B_0$ .

Das folgende Ergebnis aus dem Jahr 1971 stammt von Mendelsohn [27]. Es beschreibt einen wichtigen Zusammenhang zwischen den Schnittzahlen einer Teilmenge  $M$  untereinander:

**2.1.1 Satz** (Mendelsohn [27]) Sei  $\mathcal{D} = (\mathcal{V}, \mathcal{B})$  ein  $t$ - $(v, k, \lambda)$  Design und sei  $M \subseteq \mathcal{V}$  mit  $|M| = m$ . Dann gilt für  $i = 0, 1, \dots, t$ :

$$\sum_{j=i}^m \binom{j}{i} \alpha_j(M) = \binom{m}{i} \lambda_i. \quad (2.1)$$

*Beweis:* Wir zählen die Tupel

$$(I, B) \in \binom{M}{i} \times \mathcal{B} : I \subseteq B \cap M$$

auf zwei Weisen ab: Wählt man zuerst die Menge  $I \in \binom{M}{i}$  und bestimmt dann die Anzahl der Blöcke, die  $I$  umfassen, so ergibt sich die rechte Seite von (2.1). Andererseits kann man zunächst für  $j = i, \dots, m$  genau  $\alpha_j(M)$  Blöcke auswählen, die  $M$  in  $j$  Punkten schneiden. Innerhalb dieser  $j$ -Menge kann man dann auf  $\binom{j}{i}$  Weisen  $i$ -Teilmengen  $I$  wählen. Das ergibt die linke Seite von (2.1).  $\square$

Die Koeffizientenmatrix der Gleichungen auf der linken Seite von (2.1) hat eine besondere Gestalt: In den ersten  $(t+1)$  Spalten handelt es sich um eine obere Dreiecksmatrix mit Einsen auf der Diagonalen. Diese Spalten korrespondieren zu den Schnittzahlen  $\alpha_0(M), \dots, \alpha_t(M)$ . Rechts daneben befinden sich weitere Spalten, die zu den Schnittzahlen  $\alpha_{t+1}(M), \dots, \alpha_m(M)$  gehören. Die folgenden Gleichungen wurden von Köhler [18] angegeben.

**2.1.2 Satz** (Köhler [18]) *Sei  $\mathcal{D} = (\mathcal{V}, \mathcal{B})$  ein  $t$ - $(v, k, \lambda)$  Design und sei  $M \subseteq \mathcal{V}$  mit  $|M| = m \geq t$ . Dann gilt für  $i = 0, 1, \dots, t$ :*

$$\begin{aligned} \alpha_i(M) = & \sum_{h=i}^t (-1)^{h+i} \binom{h}{i} \binom{m}{h} \lambda_h \\ & + (-1)^{t+i+1} \sum_{h=0}^{m-t-1} \binom{t+h-i}{h} \binom{t+h+1}{i} \alpha_{t+h+1}(M). \end{aligned} \quad (2.2)$$

Den von Köhler angedeuteten, länglichen Induktionsbeweis lassen wir an dieser Stelle ausfallen. Ein Beweis der Aussage wird sich später ergeben, wenn wir den allgemeineren Satz 2.2.4 beweisen.

Die Köhler'schen Gleichungen sind nützlich, um die Nichtexistenz in Frage stehender Designs nachzuweisen. Das folgende Beispiel findet sich bereits in Köhlers Artikel [18]:

**2.1.3 Beispiel** Die Parameter 13-(32, 16, 3) sind zulässig. Angenommen es existierte ein Design  $\mathcal{D} = (\mathcal{V}, \mathcal{B})$  mit diesen Parametern, Dann könnten wir  $M \subseteq \mathcal{V}$  mit  $m = |M| = 15$  wählen. Nach (2.2) gälte

$$\alpha_1(M) = 105 - 14\alpha_{14}(M) - 195\alpha_{15}(M).$$

Es wäre nun möglich,  $M$  so zu wählen, dass zumindest ein Block des Designs die Menge  $M$  enthält. Damit wäre  $\alpha_{15}(M) \geq 1$ . Es ergäbe sich

$$\alpha_1(M) + 14\alpha_{14}(M) + 195\alpha_{15}(M) = 105,$$

was unmöglich ist, da  $\alpha_1(M)$  und  $\alpha_{14}(M)$  nichtnegative ganze Zahlen sind. Ein 13-(32, 16, 3) Design existiert also nicht.  $\diamond$

## 2.2 Höhere Schnittzahlen

Die im letzten Abschnitt eingeführten Schnittzahlen können verallgemeinert werden. Die hier vorgestellten Aussagen stammen aus der Arbeit von Tran van Trung et al. [32].

Sei wieder  $\mathcal{D} = (\mathcal{V}, \mathcal{B})$  ein  $t$ -( $v, k, \lambda$ ) Design und sei  $\mathcal{B} = \{B_1, \dots, B_b\}$  die Menge seiner Blöcke. Wir definieren für  $M \subseteq \mathcal{V}$  und jede ganze Zahl  $s \geq 1$

$$\alpha_i^{(s)}(M) := \left| \left\{ \{B_{i_1}, \dots, B_{i_s}\} \in \binom{\mathcal{B}}{s} : \left| \bigcap_{h=1}^s B_{i_h} \cap M \right| = i \right\} \right|,$$

d. h. die Anzahl der  $s$ -Teilmengen von  $\mathcal{B}$ , die sich gemeinsam in genau  $i$  Punkten von  $M$  schneiden. Diese Zahl heißt  *$i$ -te Schnittzahl der Ordnung  $s$  von  $M$  mit dem Design*. Der Vektor

$$\alpha^{(s)}(M) := \left( \alpha_0^{(s)}(M), \dots, \alpha_k^{(s)}(M) \right)$$

ist der *Schnitttyp der Ordnung  $s$  von  $M$  mit dem Design  $\mathcal{D}$* . Es gilt  $\alpha_i^{(1)}(M) = \alpha_i(M)$  für alle  $i$ , d. h. die Schnittzahlen höherer Ordnung verallgemeinern die gewöhnlichen Schnittzahlen.

Weitere Parameter eines  $t$ -Designs sind die folgenden: Seien  $I$  und  $J$  disjunkte Teilmengen von  $\mathcal{V}$  mit  $|I| = i$  und  $|J| = j$  und  $i + j \leq t$ . Für jede ganze Zahl  $s \geq 1$  setzen wir

$$\lambda_{i,j}^{(s)} = \left| \left\{ \{B_{i_1}, \dots, B_{i_s}\} \in \binom{\mathcal{B}}{s} : I \subseteq \bigcap_{h=1}^s B_{i_h} \subseteq J^c \right\} \right|,$$

wobei  $J^c := \mathcal{V} \setminus J$  das Komplement von  $J$  in der Menge  $\mathcal{V}$  ist. Im Falle  $s = 1$  hat man  $\lambda_{i,j} = \lambda_{i,j}^{(1)}$ . Im Falle  $s = 1$  und  $j = 0$  schreibt man  $\lambda_i = \lambda_{i,0}^{(1)}$ . Insbesondere ist  $\lambda = \lambda_{i,0}^{(1)}$ .

**2.2.1 Lemma** (Tran van Trung, Qiu-rong Wu, Dale M. Mesner [32]) Sei  $\mathcal{D} = (\mathcal{V}, \mathcal{B})$  ein  $t$ - $(v, k, \lambda)$  Design. Seien  $I \in \binom{\mathcal{V}}{i}$  und  $J \in \binom{\mathcal{V}}{j}$  disjunkte  $i$ - bzw.  $j$ -Teilmengen von  $\mathcal{V}$  mit  $i + j \leq t$ . Dann gilt für jede ganze Zahl  $s \geq 1$ :

$$\lambda_{i,j}^{(s)} = \sum_{u=0}^j (-1)^u \binom{j}{u} \binom{\lambda_{i+u}}{s}.$$

Insbesondere sind die Zahlen  $\lambda_{i,j}^{(s)}$  wohldefiniert, also unabhängig von der Wahl der Mengen  $I$  und  $J$  mit den geforderten Eigenschaften.

*Beweis:* (nach Tran van Trung et al. [32]) Eine  $s$ -Teilmenge von Blöcken  $\{B_{i_1}, \dots, B_{i_s}\} \in \binom{\mathcal{B}}{s}$  heißt *zulässig*, falls

$$I \subseteq \bigcap_{h=1}^s B_{i_h} \subseteq J^c$$

gilt. Um die gewünschte Anzahl der zulässigen  $s$ -Teilmengen zu bestimmen, unterscheiden wir zwei Arten:

Typ i) Es gibt einen Block, der zu  $J$  disjunkt ist, d. h. es existiert ein  $h \leq s$  mit  $B_{i_h} \cap J = \emptyset$ .

Typ ii) Keiner der Blöcke  $B_{i_1}, \dots, B_{i_s}$  ist disjunkt zu  $J$ , d. h.  $B_{i_h} \cap J \neq \emptyset$  für alle  $h = 1, \dots, s$ .

Wir bestimmen nun die Anzahlen der zulässigen  $s$ -Mengen von Blöcken der Typen i) und ii). Im Falle i) sei  $u$  die Anzahl der Blöcke der  $s$ -Teilmenge, die zu  $J$  disjunkt sind:

$$u = |\{h \in \{1, \dots, s\} \mid B_{i_h} \cap J = \emptyset\}| > 1.$$

Entsprechend gibt es  $s - u$  Blöcke, die  $J$  nichttrivial schneiden. Wir bestimmen die Anzahl der Möglichkeiten, Blöcke  $B \supseteq I$  mit  $B \cap J \neq \emptyset$  zu wählen. Sei  $R = B \cap J$ . Für jede feste Menge  $R \neq \emptyset$  mit  $|R| = r$  gibt es  $\lambda_{i+r, j-r}$  Blöcke des Designs, die  $I$  enthalten und  $J$  genau in  $R$  schneiden. Die Anzahl der Blöcke  $B$  mit  $I \subseteq B$  und  $B \cap J \neq \emptyset$  ist demnach

$$N = \sum_{\emptyset \neq R \subseteq J} |\{B \in \mathcal{B} \mid I \subseteq B, B \cap J = R\}| = \sum_{r=1}^j \binom{j}{r} \lambda_{i+r, j-r} = \lambda_i - \lambda_{i, j},$$

wobei die letzte Identität daher rührt, dass  $N$  die Anzahl der Blöcke ist, die  $I$  enthalten aber nicht ganz disjunkt von  $J$  liegen. Demnach gibt es

$$\sum_{u=1}^s \binom{\lambda_{i, j}}{u} \binom{\lambda_i - \lambda_{i, j}}{s - u}$$

zulässige  $s$ -Mengen von Blöcken vom Typ i).

Die Blöcke einer zulässigen  $s$ -Menge vom Typ ii) enthalten sämtlich  $I$ , aber kein Element von  $J$  ist in allen Blöcken enthalten. Die Anzahl dieser  $s$ -Mengen von Blöcken kann mit dem Inklusions- / Exklusionsprinzip (Lemma 1.2.3) bestimmt werden. Sei  $\Omega$  die Menge der  $s$ -Teilmengen von Blöcken, die alle  $I$  enthalten, aber nicht ganz disjunkt von  $J$  liegen. Dann gilt  $|\Omega| = \binom{N}{s} = \binom{\lambda_i - \lambda_{i, j}}{s}$ . Wir setzen für  $y \in Y$

$$A_y := \left\{ \{B_{i_1}, \dots, B_{i_s}\} \in \Omega \mid y \in \bigcap_{h=1}^s B_{i_h} \right\}.$$

Für  $Y \subseteq J$  mit  $Y = \{y_1, \dots, y_u\}$  sei

$$A_Y = \bigcap_{h=1}^u A_{y_h}.$$



Die gewünschte Anzahl der  $s$ -Mengen vom Typ ii) ist die Kardinalität von

$$\hat{\Omega} = \Omega \setminus \bigcup_{y \in J} A_y,$$

die sich nach Inklusion / Exklusion wie folgt berechnet:

$$|\hat{\Omega}| = |\Omega| + \sum_{u=1}^j (-1)^u \sum_{\substack{Y=\{y_1, \dots, y_u\} \subseteq J, \\ |Y|=u}} \left| \bigcap_{h=1}^u A_{y_h} \right|,$$

wobei  $\bigcap_{h=1}^u A_{y_h}$  die Menge der  $s$ -Mengen von Blöcken ist, die alle  $I$  und  $u$  weitere Punkte aus  $J$  enthalten. Die Kardinalität dieser Menge ist  $\binom{\lambda_{i+u}}{s}$ , unabhängig von der Wahl der Punkte  $y_1, \dots, y_u$ , und so ergibt sich

$$|\hat{\Omega}| = \binom{\lambda_i - \lambda_{i,j}}{s} + \sum_{u=1}^j (-1)^u \cdot \binom{j}{u} \binom{\lambda_{i+u}}{s}.$$

Addieren wir die Anzahlen der zulässigen  $s$ -Mengen von Blöcken der Typen i) und ii), so erhalten wir

$$\begin{aligned} \lambda_{i,j}^{(s)} &= \sum_{u=1}^s \binom{\lambda_{i,j}}{u} \binom{\lambda_i - \lambda_{i,j}}{s-u} + \binom{\lambda_i - \lambda_{i,j}}{s} + \sum_{u=1}^j (-1)^u \binom{j}{u} \binom{\lambda_{i+u}}{s} \\ &= \sum_{u=0}^s \binom{\lambda_{i,j}}{u} \binom{\lambda_i - \lambda_{i,j}}{s-u} + \sum_{u=1}^j (-1)^u \binom{j}{u} \binom{\lambda_{i+u}}{s}. \end{aligned}$$

Die folgende Identität für Binomialkoeffizienten aus Iyanaga [12, Seite 1429]

$$\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \binom{m}{r-i} = \binom{n+m}{r}$$

liefert das gewünschte Resultat:

$$\lambda_{i,j}^{(s)} = \binom{\lambda_i}{s} + \sum_{u=1}^j (-1)^u \binom{j}{u} \binom{\lambda_{i+u}}{s}$$

$$= \sum_{u=0}^j (-1)^u \binom{j}{u} \binom{\lambda_{i+u}}{s}.$$

□

Der nächste Schritt ist die Verallgemeinerung der mendelsohnschen Gleichungen (2.1) für den Fall höherer Schnittzahlen. Wir benötigen etwas Vorarbeit:

Sei  $\mathcal{A} = (a_{i,j})$  eine 0/1-Matrix mit  $u$  Zeilen und  $v$  Spalten. Wir nummerieren die Zeilen und Spalten mit Indexmengen  $\mathcal{Z} = \{1, 2, \dots, u\}$  und  $\mathcal{S} = \{1, 2, \dots, v\}$ .

(i) Sei  $J = \{j_1, j_2, \dots, j_n\} \subseteq \mathcal{S}$ . Dann ist

$$J' = \{i \in \mathcal{Z} \mid a_{i,j_1} = a_{i,j_2} = \dots = a_{i,j_n} = 1\} \subseteq \mathcal{Z}$$

die Menge der Zeilenindizes, deren Einträge in allen zu  $J$  gehörigen Spalten Eins sind.

(ii) Sei  $I = \{i_1, i_2, \dots, i_m\} \subseteq \mathcal{Z}$ . Dann ist

$$I' = \{j \in \mathcal{S} \mid a_{i_1,j} = a_{i_2,j} = \dots = a_{i_m,j} = 1\} \subseteq \mathcal{S}$$

die Menge der Spaltenindizes, deren Einträge in allen zu  $I$  gehörigen Zeilen Eins sind.

**2.2.2 Lemma** (Tran van Trung, Qiu-rong Wu, Dale M. Mesner [32]) Sei  $\mathcal{A}$  eine 0/1-Matrix mit  $u$  Zeilen und  $v$  Spalten, die durch Indexmengen  $\mathcal{Z} = \{1, 2, \dots, u\}$  und  $\mathcal{S} = \{1, 2, \dots, v\}$  beschriftet sind. Dann gilt für alle  $m, n \in \mathbb{N}$ :

$$\sum_{I \in \binom{\mathcal{Z}}{m}} \binom{|I'|}{n} = \sum_{J \in \binom{\mathcal{S}}{n}} \binom{|J'|}{m}.$$

*Beweis:* Ist eine der Zahlen  $m$  und  $n$  Null oder  $m > u$  oder  $n > v$ , so ist die Gleichung trivialerweise erfüllt. Wir können also  $1 \leq m \leq u$  und  $1 \leq n \leq v$  annehmen. Für  $I \subseteq \mathcal{Z}$  und  $J \subseteq \mathcal{S}$  sei  $\mathcal{A}_{[I],[J]}$  die  $(|I| \times |J|)$ -Untermatrix von  $\mathcal{A}$ , die aus den im Schnitt der zu  $I$  gehörigen Zeilen und der zu  $J$  gehörigen Spalten liegenden Einträgen gebildet ist. Mit der  $(m \times n)$ -Matrix  $\underline{1}_{m,n}$ , deren Einträge alle Eins sind, gilt dann

$$\left| \left\{ I \in \binom{\mathcal{Z}}{m}, J \in \binom{\mathcal{S}}{n} \mid \mathcal{A}_{[I],[J]} = \underline{1}_{m,n} \right\} \right| = \sum_{I \in \binom{\mathcal{Z}}{m}} \binom{|I'|}{n} = \sum_{J \in \binom{\mathcal{S}}{n}} \binom{|J'|}{m}.$$

□

Das folgende Resultat verallgemeinert die Gleichungen von Mendelsohn:

**2.2.3 Satz** (Tran van Trung, Qiu-rong Wu, Dale M. Mesner [32]) Sei  $\mathcal{D} = (\mathcal{V}, \mathcal{B})$  ein  $t$ -( $v, k, \lambda$ ) Design. Sei  $M \subseteq \mathcal{V}$  mit  $|M| = m$ . Dann gilt für jede ganze Zahl  $s \geq 1$  und für alle  $i$  mit  $0 \leq i \leq t$ :

$$\sum_{j=i}^m \binom{j}{i} a_j^{(s)}(M) = \binom{m}{i} \binom{\lambda_i}{s}. \quad (2.3)$$

*Beweis:* Sei  $\mathcal{N} = (n_{i,j})$  die Inzidenzmatrix des Designs. Ebenso wie in Lemma 2.2.2 sei  $\mathcal{S} = \{1, 2, \dots, b\}$  eine Indexmenge für die Spalten von  $\mathcal{N}$ . Wir betrachten  $\mathcal{N}_{[M],[\mathcal{S}]}$ , die  $(m \times b)$ -Untermatrix von  $\mathcal{N}$ , die aus den zu den Elementen von  $M$  gehörigen Zeilen der Inzidenzmatrix  $\mathcal{N}$  gebildet wird. Für jede  $i$ -Teilmenge  $I = \{x_1, \dots, x_i\} \subseteq M$  sei  $I'$  die Menge der Spaltenindizes von Blöcken, die  $I$  enthalten, d. h.

$$I' = \{j \mid 0 \leq j \leq b : n_{x_h,j} = 1 \text{ für } h = 1, \dots, i\}.$$

Für  $J = \{y_1, \dots, y_j\} \subseteq \mathcal{S}$  sei

$$J' = \{x \in M \mid n_{x,y_h} = 1 \text{ für } h = 1, \dots, j\}.$$

Für jedes  $I \in \binom{M}{i}$  gibt es  $|I'| = \lambda_i$  Blöcke, die  $I$  ganz enthalten. Aus diesen Blöcken können wir  $\binom{I'}{s}$   $s$ -Teilmengen bilden, die  $I$  in ihrem Schnitt enthalten. Da es  $\binom{m}{i}$  solche  $i$ -Teilmengen  $I \subseteq M$  gibt, erhalten wir folgende Gleichung

$$\binom{m}{i} \binom{\lambda_i}{s} = \sum_{I \in \binom{M}{i}} \binom{I'}{s}$$

was nach Lemma 2.2.2 gleich ist mit

$$= \sum_{J \in \binom{\mathcal{S}}{i}} \binom{J'}{i}$$

und dies kann durch doppelte Abzählung der Paare  $(I, \{B_{i_1}, \dots, B_{i_s}\}) \in \binom{M}{i} \times \binom{\mathcal{B}}{s} : I \subseteq M \cap \bigcap_{h=1}^s B_{i_h}$  umgeformt werden zu

$$= \sum_{j=i}^m \binom{j}{i} \alpha_j^{(s)}(M).$$

□

Der folgende Satz verallgemeinert Satz 2.1.2. Der Beweis ist eine Verallgemeinerung eines Beweises von Bolick [7] des Satzes von Köhler.

**2.2.4 Satz** (Tran van Trung, Qiu-rong Wu, Dale M. Mesner [32]) Sei  $\mathcal{D} = (\mathcal{V}, \mathcal{B})$  ein  $t$ - $(v, k, \lambda)$  Design und sei  $M \subseteq \mathcal{V}$  mit  $|M| = m \geq t$ . Dann gilt für jede ganze Zahl  $s \geq 1$  und für alle  $i = 0, 1, \dots, t$ :

$$\begin{aligned} \alpha_i^{(s)}(M) &= \sum_{h=i}^t (-1)^{h+i} \binom{h}{i} \binom{m}{h} \binom{\lambda_h}{s} \\ &\quad + (-1)^{t+i+1} \sum_{h=0}^{m-t-1} \binom{t+h-i}{h} \binom{t+h+1}{i} \alpha_{t+h+1}^{(s)}(M). \end{aligned} \tag{2.4}$$

*Beweis:* Sei  $\alpha^{(s)}(M) = (\alpha_0^{(s)}(M), \dots, \alpha_m^{(s)}(M))$  der Schnitttyp von  $M$  und sei  $\eta = (y_0, \dots, y_t)$  der Vektor mit den Einträgen  $y_i = \binom{m}{i} \binom{\lambda_i}{s}$  für  $0 \leq i \leq t$ . Umschreiben von Gleichung (2.1) in Matrixschreibweise ergibt

$$\mathfrak{B}_{[0..t],[0..k]} \cdot \alpha^{(s)}(M)^\top = \eta^\top.$$

Wir spalten den Vektor  $\alpha^{(s)}(M)$  in zwei Teile auf, wobei wir die ausgewählten Positionen im Index anzeigen. Wir wählen

$$\alpha_{[0,\dots,t]}^{(s)}(M) = (\alpha_0^{(s)}(M), \dots, \alpha_t^{(s)}(M)),$$

den Vektor der ersten  $(t + 1)$ -Elemente, und

$$\alpha_{[t+1,\dots,k]}^{(s)}(M) = (\alpha_{t+1}^{(s)}(M), \dots, \alpha_k^{(s)}(M)),$$

den Vektor der übrigen Koeffizienten. Dann ergibt sich aus (2.1)

$$\begin{aligned} \mathfrak{B}_{[0,\dots,t],[0,\dots,t]} \cdot \alpha_{[0,\dots,t]}^{(s)}(M)^\top &= -\mathfrak{B}_{[0,\dots,t],[t+1,\dots,k]} \cdot \alpha_{[t+1,\dots,k]}^{(s)}(M)^\top + \eta^\top \\ \iff \alpha_{[0,\dots,t]}^{(s)}(M)^\top &= -\mathfrak{B}_{[0,\dots,t],[0,\dots,t]}^{-1} \cdot \mathfrak{B}_{[0,\dots,t],[t+1,\dots,k]} \cdot \alpha_{[t+1,\dots,k]}^{(s)}(M)^\top \\ &\quad + \mathfrak{B}_{[0,\dots,t],[0,\dots,t]}^{-1} \cdot \eta^\top, \end{aligned}$$

wobei  $\mathfrak{B}^{-1} = (b'_{i,j})$  nach Lemma 1.3.20 die Koeffizienten  $b'_{i,j} = (-1)^{i+j} \binom{j}{i}$  hat. In der  $i$ -ten Zeile ergibt sich für  $0 \leq i \leq t$ :

$$\alpha_i^{(s)}(M) = - \sum_{h=i+1}^m \underbrace{\sum_{j=i}^t (-1)^{i+j} \binom{j}{i} \binom{h}{j}}_{=: C_h} \alpha_h^{(s)}(M) + \sum_{h=i}^t (-1)^{i+h} \binom{h}{i} \binom{m}{h} \binom{\lambda_h}{s}.$$

Wir betrachten  $C_h$  näher, und verwenden dabei folgende Identität für Binomialkoeffizienten, die in Knuth [17] nachgelesen werden kann:

$$\sum_{j=0}^m (-1)^j \binom{n}{j} = (-1)^m \binom{n-1}{m}. \quad (2.5)$$

Wir erhalten

$$\begin{aligned}
 C_k &= \sum_{j=i}^t (-1)^{t+j} \binom{j}{i} \binom{h}{j} \\
 &= \sum_{j=0}^{t-i} (-1)^j \binom{j+i}{i} \binom{h}{j+i} \\
 &= \sum_{j=0}^{t-i} (-1)^j \frac{(j+i)!}{i! j!} \frac{h!}{(j+i)!(h-j-i)!} \\
 &= \left[ \sum_{j=0}^{t-i} (-1)^j \frac{(h-i)!}{j! (h-j-i)!} \right] \binom{h}{i} \\
 &= \left[ \sum_{j=0}^{t-i} (-1)^j \binom{h-i}{j} \right] \binom{h}{i} \\
 &\stackrel{(2.5)}{=} (-1)^{t-i} \binom{h-i-1}{t-i} \binom{h}{i} \\
 &= (-1)^{t-i} \binom{h-i-1}{h-t-1} \binom{h}{i}.
 \end{aligned}$$

Einsetzen dieses Ausdrucks für  $C_h$  ergibt nach einer Indexverschiebung die Behauptung:

$$\begin{aligned}
 &\alpha_i^{(s)}(M) \\
 &= - \sum_{h=t+1}^m (-1)^{t-i} \binom{h-i-1}{h-t-1} \binom{h}{i} \alpha_h^{(s)}(M) + \sum_{h=i}^t (-1)^{t+h} \binom{h}{i} \binom{m}{h} \binom{\lambda_h}{s} \\
 &= (-1)^{t+i+1} \sum_{h=0}^{m-t-1} \binom{t+h-i}{h} \binom{t+h+1}{i} \alpha_{t+h+1}^{(s)}(M) \\
 &\quad + \sum_{h=i}^t (-1)^{t+h} \binom{h}{i} \binom{m}{h} \binom{\lambda_h}{s}.
 \end{aligned}$$

□

Wählt man  $s = 1$ , so erhält man hieraus einen Beweis von Satz 2.1.2.

## 2.3 Globale Schnittzahlen

Um Invarianten zur Isomorphieklassifikation von Designs zu erhalten, definieren wir globale Schnittzahlen. Gleichzeitig dehnen wir die Ergebnisse der letzten Abschnitte auf diese neue Sorte von Kenngrößen aus:

Sei wieder  $\mathcal{D} = (\mathcal{V}, \mathcal{B})$  ein  $t$ - $(v, k, \lambda)$  Design. Für jede ganze Zahl  $s > 1$  und jedes  $i \in \mathbb{N}$  setzen wir

$$\alpha_i^{(s)}(\mathcal{D}) = \left| \left\{ \{B_{j_1}, \dots, B_{j_s}\} \in \binom{\mathcal{B}}{s} : \left| \bigcap_{h=1}^s B_{j_h} \right| = i \right\} \right|,$$

also die Anzahl der  $s$ -Teilmengen von Blöcken des Designs, die sich in genau  $i$  Punkten schneiden. Dies ist die  $i$ -te globale Schnittzahl der Ordnung  $s$  des Designs  $\mathcal{D}$ . Es ist  $\alpha_i^{(s)}(\mathcal{D}) = 0$  für  $i > k$  und  $\alpha_k^{(s)}(\mathcal{D})$  ist 0 für  $s > 1$  und  $b$  sonst. Der Vektor

$$\alpha^{(s)}(\mathcal{D}) = \left( \alpha_0^{(s)}(\mathcal{D}), \dots, \alpha_k^{(s)}(\mathcal{D}) \right)$$

ist der *globale Schnitttyp der Ordnung  $s$  von  $\mathcal{D}$* .

Wir sind daran interessiert, die globalen Schnittzahlen eines Designs schnell zu berechnen. Ein Algorithmus, der dies leistet, wird in Abschnitt 5.1 vorgestellt. Wir bereiten dies an dieser Stelle vor, indem wir eine leicht modifizierte Schnittinvariante einführen, die sich als leichter berechenbar herausstellen wird.

Für  $s \geq 1$  und  $i \in \mathbb{N}$  setzen wir

$$\alpha_i^{[s]}(\mathcal{D}) = \left| \left\{ (B_{j_1}, \dots, B_{j_s}) \in \mathcal{B}^s : \left| \bigcap_{h=1}^s B_{j_h} \right| = i \right\} \right|,$$

die Anzahl der  $s$ -Tupel von Blöcken, die sich in genau  $i$  Punkten schneiden. Wir nennen diese Zahl die  $i$ -te globale Schnittzahl von  $s$ -Tupeln von Blöcken von  $\mathcal{D}$ . Es gilt  $\alpha_i^{[s]}(\mathcal{D}) = 0$  für  $i > k$ . Der Vektor

$$\alpha^{[s]}(\mathcal{D}) = \left( \alpha_0^{[s]}(\mathcal{D}), \dots, \alpha_k^{[s]}(\mathcal{D}) \right)$$

ist der *globale Schnitttyp von  $s$ -Tupeln von Blöcken des Designs*.

Die Schnitttypen von  $s$ -Teilmengen  $\alpha^{(s)}(\mathcal{D})$  und  $s$ -Tupeln  $\alpha^{[s]}(\mathcal{D})$  hängen wie folgt zusammen:

**2.3.1 Satz** Sei  $\mathcal{D} = (\mathcal{V}, \mathcal{B})$  ein  $t$ - $(v, k, \lambda)$  Design und sei  $0 < s \in \mathbb{N}$ . Dann gilt:

$$\alpha^{[s]}(\mathcal{D}) = \sum_{u=1}^s u! \delta_2(s, u) \alpha^{(u)}(\mathcal{D})$$

sowie

$$\alpha^{(s)}(\mathcal{D}) = \frac{1}{s!} \sum_{u=1}^s \delta_1(s, u) \alpha^{[u]}(\mathcal{D}).$$

*Beweis:* Wir betrachten die Potenzmenge  $\mathfrak{P}(\mathcal{V})$ , welche zusammen mit der Verknüpfung  $\cap$  eine Halbgruppe bildet. Wegen  $M \cap M = M$  für alle  $M \subseteq \mathcal{V}$  sind die Elemente dieser Halbgruppe sämtlich idempotent. Sei ferner  $(\mathbb{Z}[\mathfrak{P}(\mathcal{V})], \cap)$  der *Halbgruppenring* über  $\mathfrak{P}(\mathcal{V})$  mit ganzzahligen Koeffizienten. Die Elemente dieses Rings haben die Form

$$a = \sum_{M \in \mathfrak{P}(\mathcal{V})} a_M \cdot M.$$

Die multiplikative Verknüpfung dieses Ringes wird durch die Verknüpfung der Halbgruppe, also die Schnittbildung, definiert. Wir schreiben deswegen statt des Malpunkts das Schnittsymbol. Die Summe und der Schnitt zweier Elemente  $a = \sum_{M \in \mathfrak{P}(\mathcal{V})} a_M \cdot M$  und  $b = \sum_{M \in \mathfrak{P}(\mathcal{V})} b_M \cdot M$  in  $\mathbb{Z}[\mathfrak{P}(\mathcal{V})]$  sind

$$a + b := \sum_{M \in \mathfrak{P}(\mathcal{V})} (a_M + b_M) \cdot M,$$

$$a \cap b := \sum_{W \in \mathfrak{P}(\mathcal{V})} \sum_{\substack{M, N \in \mathfrak{P}(\mathcal{V}) \\ M \cap N = W}} (a_M \cdot b_N) \cdot W.$$



Wir betrachten  $\mathbb{Z}[\mathfrak{P}(\mathcal{V})]$  als  $\mathbb{Z}$ -Modul. Ein weiterer  $\mathbb{Z}$ -Modul ist der Raum der ganzzahligen Vektoren  $\mathcal{W}_v := \mathbb{Z}^{v+1} = \langle \mathbf{e}_0, \dots, \mathbf{e}_v \rangle_{\mathbb{Z}}$ . Wir definieren folgende Abbildung, welche wir *Gewichtsfunktion* nennen:

$$\kappa : \mathbb{Z}[\mathfrak{P}(\mathcal{V})] \rightarrow \mathbb{Z}^{v+1}, \quad \sum_{M \in \mathfrak{P}(\mathcal{V})} a_M \cdot M \mapsto \sum_{M \in \mathfrak{P}(\mathcal{V})} a_M \cdot \mathbf{e}_{|M|}.$$

Diese Abbildung ist ein  $\mathbb{Z}$ -Modul Homomorphismus. Der Raum  $\mathcal{W}_v$  ist der *Gewichtsraum*. Die Abbildung  $\kappa$  ist nützlich um Schnittzahlen zu berechnen: Seien  $B_1, \dots, B_b$  die Blöcke eines Designs  $\mathcal{D} = (\mathcal{V}, \mathcal{B})$ . Dann gilt für jede ganze Zahl  $s \geq 1$ :

$$\alpha^{[s]}(\mathcal{D}) = \kappa \left( \sum_{(B_{j_1}, \dots, B_{j_s}) \in \mathcal{B}^s} \bigcap_{h=1}^s B_{j_h} \right) \quad (2.6)$$

und

$$\alpha^{(s)}(\mathcal{D}) = \kappa \left( \sum_{\substack{x \in \binom{\{1, \dots, b\}}{s} \\ x = \{x_1, \dots, x_s\}}} \bigcap_{j=1}^s B_{x_j} \right). \quad (2.7)$$

Mit dem Multinomialssatz 1.3.16 folgern wir

$$\begin{aligned} \alpha^{[s]}(\mathcal{D}) &\stackrel{(2.6)}{=} \kappa \left( \sum_{(B_{j_1}, \dots, B_{j_s}) \in \mathcal{B}^s} \bigcap_{h=1}^s B_{j_h} \right) \\ &= \kappa \left( \bigcap_{j=1}^s \sum_{j=1}^b B_j \right) \\ &\stackrel{1.3.16}{=} \kappa \left( \sum_{\substack{a_1 \geq 0, \dots, a_b \geq 0 \\ \sum_{h=1}^b a_h = s}} \binom{s}{a_1, \dots, a_b} \bigcap_{j=1}^b \bigcap_{i=1}^{a_j} B_j \right) = (*), \end{aligned}$$

wobei wir  $\bigcap_{\emptyset} S = \mathcal{V}$  für jede Menge  $S$  setzen. In der Summe über alle nichtnegativen  $a_1, \dots, a_b$  mit  $\sum_{h=1}^b a_h = s$  sind eventuell viele Terme Null. Die nichtverschwindenden Glieder ergeben eine Zahlenfolge  $c_1, \dots, c_u$  mit  $\sum_{h=1}^u c_h = s$ .

Wir können die ursprüngliche Summation aufspalten, indem wir für  $u = 1, \dots, s$  zuerst die Positionen  $\{x_1, \dots, x_u\}$  durchlaufen, an denen von Null verschiedene Koeffizienten stehen. Dies ergibt

$$(*) = \kappa \left( \sum_{u=1}^s \sum_{\substack{x \in \binom{[1, \dots, b]}{u} \\ x = \{x_1, \dots, x_u\}}} \sum_{\substack{c_1 \geq 1, \dots, c_u \geq 1, \\ \sum_{h=1}^u c_h = s}} \binom{s}{c_1, \dots, c_u} \prod_{j=1}^u \underbrace{B_{x_j}}_{=B_{x_j}} \right) = (**).$$

Die beiden inneren Summen sind unabhängig voneinander und können vertauscht werden. Bei der innersten Schnittbildung können wir den Exponenten  $c_j \geq 1$  vernachlässigen, denn für jede Menge  $M$  gilt  $\underbrace{M \cap M \cap \dots \cap M}_{\geq 1 \text{ mal}} = M$ . Wir erhalten

$$(**) = \kappa \left( \sum_{u=1}^s \sum_{\substack{c_1 \geq 1, \dots, c_u \geq 1 \\ \sum_{k=1}^u c_k = s}} \binom{s}{c_1, \dots, c_u} \sum_{\substack{x \in \binom{[1, \dots, b]}{u} \\ x = \{x_1, \dots, x_u\}}} \prod_{j=1}^u B_{x_j} \right) = (** *).$$

Die innere Summe ist unabhängig von der Partition  $c = (c_1, \dots, c_u)$  und kann ausgeklammert werden. Die übrigbleibende Summe aller Multinomialkoeffizienten über alle geordneten eigentlichen Partitionen der Zahl  $s$  in  $u$  Teile ist nach Lemma 1.3.14 gleich  $u! \cdot \mathcal{S}_2(s, u)$ . Wegen der  $\mathbb{Z}$ -Linearität von  $\kappa$  und (2.7) folgern wir weiter

$$\begin{aligned} (** *) &= \kappa \left( \sum_{u=1}^s \underbrace{\left( \sum_{\substack{c_1 \geq 1, \dots, c_u \geq 1 \\ \sum_{k=1}^u c_k = s}} \binom{s}{c_1, \dots, c_u} \right)}_{u! \cdot \mathcal{S}_2(s, u)} \sum_{\substack{x \in \binom{[1, \dots, b]}{u} \\ x = \{x_1, \dots, x_u\}}} \prod_{j=1}^u B_{x_j} \right) \\ &= \sum_{u=1}^s u! \cdot \mathcal{S}_2(s, u) \cdot \kappa \left( \sum_{\substack{x \in \binom{[1, \dots, b]}{u} \\ x = \{x_1, \dots, x_u\}}} \prod_{j=1}^u B_{x_j} \right) \\ &\stackrel{(2.7)}{=} \sum_{u=1}^s u! \cdot \mathcal{S}_2(s, u) \cdot \alpha^{(u)}(\mathcal{D}), \end{aligned}$$

welches zusammengesetzt die erste Gleichung ist. Die zweite Gleichung folgt durch Inversion gemäß Lemma 1.3.19. Beide Gleichungen sind äquivalent.  $\square$

**2.3.2 Lemma** Sei  $\mathcal{D}$  ein  $t$ - $(v, k, \lambda)$  Design. Dann gilt für jede ganze Zahl  $s \geq 1$  und jede ganze Zahl  $i$  mit  $0 \leq i \leq t$ ,

$$\sum_{j=i}^k \binom{j}{i} \alpha_j^{(s)}(\mathcal{D}) = \binom{v}{i} \binom{\lambda_i}{s},$$

und

$$\begin{aligned} \alpha_i^{(s)}(\mathcal{D}) &= \sum_{h=i}^t (-1)^{h+i} \binom{h}{i} \binom{v}{h} \binom{\lambda_h}{s} \\ &\quad + (-1)^{t+i+1} \sum_{h=0}^{k-t-1} \binom{t+h-i}{h} \binom{t+h+1}{i} \alpha_{t+h+1}^{(s)}(\mathcal{D}). \end{aligned}$$

*Beweis:* Setzt man  $M := \mathcal{V}$ , so gilt

$$\alpha_i^{(s)}(\mathcal{V}) = \alpha_i^{(s)}(\mathcal{D})$$

für  $s \geq 1$  und  $i \in \mathbb{N}$ . Die angegebenen Gleichungen folgen dann aus Satz 2.2.3 und aus Satz 2.2.4 mit  $m = v$ .  $\square$



# Kapitel 3

## Die Konstruktion von Designs

In diesem Kapitel betrachten wir die Konstruktion von Designs mit vorgeschriebener Automorphismengruppe. Dazu wird zunächst in Abschnitt 3.1 die Methode von Kramer und Mesner vorgestellt und an kleinen Beispielen erprobt. Mit dem vom Autor in der Bayreuther Forschergruppe um Prof. Dr. R. Laue entwickelten Programmpaket DISCRETA [3] können auf diese Weise Designs erzeugt werden. In Abschnitt 3.2 wird ein Resultat dieser Forschungen ausführlich vorgestellt, nämlich Designs zur Gruppe  $PSL(3, 5)$  mit den Parametern  $8-(31, 10, \lambda)$ . Abschnitt 3.3 präsentiert eine Liste aller bis dato bekannten  $t$ -Designs mit großem  $t$  ( $d, h, t \geq 7$ ), die mit der Methode von Kramer und Mesner konstruiert worden sind.

### 3.1 Die Methode von Kramer und Mesner

$t$ -Designs mit großem  $t$  sind schwierig zu konstruieren. Der folgende Satz von Kramer und Mesner [19] erleichtert diese Aufgabe erheblich. Dazu nimmt man an, dass das zu konstruierende Design eine nichttriviale Automorphismengruppe besitzt, und schreibt diese Gruppe  $A$  von Anfang an vor. Dann konstruiert man die Designs, die unter dieser Gruppe invariant sind, also diese Gruppe als Unter-

gruppe ihrer vollen Automorphismengruppe besitzen. Das Problem, Designs zu konstruieren, die unter einer festen Gruppe invariant sind, läßt sich auf das Lösen eines ganzzahligen Gleichungssystems zurückführen. Durch die Wahl einer nicht zu kleinen Gruppe  $A$  erleichtert sich das Konstruktionsproblem unter Umständen erheblich. Nachteilig an diesem Ansatz ist allerdings, dass nur solche Designs konstruiert werden, die tatsächlich die vorgeschriebene Gruppe als Automorphismengruppe zulassen.

**3.1.1 Satz** (*Earl S. Kramer, Dale M. Mesner [19]*) Sei  $t$ - $(v, k, \lambda)$  ein möglicher Parametersatz eines Designs (also z. B. ein zulässiger Parametersatz). Sei  $\mathcal{V} = \{1, \dots, v\}$  eine  $v$ -elementige Menge und sei  $A \leq \text{Sym}_{\mathcal{V}}$  eine Permutationsgruppe. Sei  $\mathfrak{D}_{t-(v,k,\lambda)}^A$  die Menge der  $t$ - $(v, k, \lambda)$  Designs auf  $\mathcal{V}$ , die unter  $A$  invariant sind.  $A$  habe  $\ell_t$  Bahnen auf  $t$ -Teilmengen von  $\mathcal{V}$  und  $\ell_k$  Bahnen auf  $k$ -Teilmengen. Seien  $\mathcal{O}_{t,1}, \dots, \mathcal{O}_{t,\ell_t}$  und  $\mathcal{O}_{k,1}, \dots, \mathcal{O}_{k,\ell_k}$  die  $A$ -Bahnen auf  $\binom{\mathcal{V}}{t}$  bzw.  $\binom{\mathcal{V}}{k}$ . Seien  $O_{i,j} \in \mathcal{O}_{i,j}$  Vertreter dieser Bahnen für  $i \in \{t, k\}$  und  $1 \leq j \leq \ell_i$ . Wir definieren für  $i \leq \ell_t$  und  $j \leq \ell_k$

$$m_{i,j} = |\{K \in \mathcal{O}_{k,j} \mid O_{t,i} \subseteq K\}|.$$

Aus diesen nichtnegativen ganzen Zahlen bilden wir die Matrix

$$\mathcal{M}_{t,k}^A := (m_{i,j}).$$

Sei  $\mathfrak{L}_{t-(v,k,\lambda)}^A$  die Menge der Lösungen von

$$\mathcal{M}_{t,k}^A \cdot \mathfrak{r}^T = \lambda \cdot \mathbf{1}_{\ell_t \times 1} \tag{3.1}$$

mit  $\mathfrak{r} \in [0, 1]^{\ell_k}$ . Dann induzieren die Abbildungen

$$\mathfrak{D}_{t-(v,k,\lambda)}^A \rightarrow \mathfrak{L}_{t-(v,k,\lambda)}^A, \mathcal{D} = (\mathcal{V}, \mathcal{B}) \mapsto \mathfrak{r}_{\mathcal{B}}$$

mit

$$\mathfrak{r}_{\mathcal{B}}(j) = 1 \iff \mathcal{O}_{k,j} \subseteq \mathcal{B}, \text{ und } 0 \text{ sonst}$$

und

$$\mathfrak{L}_{t-(v,k,\lambda)}^A \rightarrow \mathfrak{D}_{t-(v,k,\lambda)}^A, \quad \mathfrak{F} \mapsto \mathcal{D}_{\mathfrak{F}} = (\mathcal{V}, \mathcal{B}_{\mathfrak{F}})$$

mit

$$\mathcal{B}_{\mathfrak{F}} = \bigcup_{\substack{j=1 \\ \mathfrak{F}(j)=1}}^{\ell_k} \mathcal{O}_{k,j}$$

zueinander inverse Bijektionen zwischen den Mengen  $\mathfrak{D}_{t-(v,k,\lambda)}^A$  und  $\mathfrak{L}_{t-(v,k,\lambda)}^A$ .

*Beweis:* Wir zeigen zunächst, dass die Zahlen  $m_{i,j}$  wohldefiniert sind, also nicht von der Wahl der Vertretermenge  $O_{t,i} \in \mathcal{O}_{t,i}$  abhängen. Wir schreiben kurzfristig

$$m_{i,j}(O) = |\{K \in \mathcal{O}_{k,j} \mid O \subseteq K\}|,$$

wobei das Argument anzeigt, welche Menge  $O \in \mathcal{O}_{t,i}$  in der Definition der Zahl benutzt wird. Für jedes  $a \in A$  gilt dann

$$\begin{aligned} m_{i,j}(O_{t,i}^a) &= |\{K \in \mathcal{O}_{k,j} \mid O_{t,i}^a \subseteq K\}| \\ &= |\{K \in \mathcal{O}_{k,j} \mid O_{t,i} \subseteq K^{a^{-1}}\}| \\ &= |\{K \in \mathcal{O}_{k,j}^{a^{-1}} \mid O_{t,i} \subseteq K\}| \\ &= |\{K \in \mathcal{O}_{k,j} \mid O_{t,i} \subseteq K\}| \\ &= m_{i,j}(O_{t,i}), \end{aligned}$$

wobei wir benützen, dass  $\mathcal{O}_{k,j} = \mathcal{O}_{k,j}^a$  gilt, denn diese Menge ist eine Bahn der Gruppe  $A$ . Damit ist die Wohldefiniertheit gezeigt.

Wir zeigen nun, dass für  $\mathcal{D} = (\mathcal{V}, \mathcal{B}) \in \mathfrak{D}_{t-(v,k,\lambda)}^A$  die Abbildung  $\mathfrak{B} \mapsto \mathfrak{F}_{\mathfrak{B}}$  mit  $\mathfrak{F}_{\mathfrak{B}}(j) = 1 \Leftrightarrow O_{k,j} \in \mathfrak{B} \Leftrightarrow \mathcal{O}_{k,j} \subseteq \mathfrak{B}$  wohldefiniert ist, und dass das Bild in  $\mathfrak{L}_{t-(v,k,\lambda)}^A$  enthalten ist. Zunächst folgt wegen  $A \leq \text{Aut}(\mathcal{D})$ , dass mit  $O_{k,j} \in \mathfrak{B}$  auch jede Menge  $O_{k,j}^a$  für  $a \in A$  in  $\mathfrak{B}$  enthalten ist. Die Blockmenge  $\mathfrak{B}$  setzt sich also aus ganzen Bahnen unter  $A$  zusammen. Mit anderen Worten, die Bahn  $\mathcal{O}_{k,j}$

ist entweder vollständig in  $\mathcal{B}$  enthalten oder  $\mathcal{B} \cap \mathcal{O}_{k,j}$  ist leer. Der Vektor  $\mathfrak{r}_{\mathcal{B}}$  gibt an, welche  $k$ -Bahnen in dem Design enthalten sind:

$$\mathfrak{r}_{\mathcal{B}}(j) = 1 \iff \mathcal{O}_{k,j} \subseteq \mathcal{B} \iff \mathcal{O}_{k,j} \in \mathcal{B}.$$

Wir zeigen nun, dass der Vektor  $\mathfrak{r}_{\mathcal{B}}$  in  $\mathfrak{L}_{t-(v,k,\lambda)}^A$  liegt, also eine Lösung der Gleichung (3.1) ist. Sei  $i \leq \ell_t$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{\ell_k} m_{i,j} \cdot \mathfrak{r}_{\mathcal{B}}(j) &= \sum_{\substack{j=1 \\ \mathcal{O}_{k,j} \in \mathcal{B}}}^{\ell_k} |\{K \in \mathcal{O}_{k,j} \mid \mathcal{O}_{t,i} \subseteq K\}| \\ &= |\{K \in \mathcal{B} \mid \mathcal{O}_{t,i} \subseteq K\}| \\ &= \lambda. \end{aligned}$$

Demnach gilt  $\mathcal{M}_{t,k}^A \cdot \mathfrak{r}_{\mathcal{B}}^T = \lambda \cdot \mathbf{1}_{\ell_t \times 1}$ , also  $\mathfrak{r}_{\mathcal{B}} \in \mathfrak{L}_{t-(v,k,\lambda)}^A$ .

Anders herum sei  $\mathfrak{r} \in \mathfrak{L}_{t-(v,k,\lambda)}^A$  ein 0/1-Vektor der Länge  $\ell_k$  mit  $\mathcal{M}_{t,k}^A \cdot \mathfrak{r}^T = \lambda \cdot \mathbf{1}_{\ell_t \times 1}$ . Es ist nachzuweisen, dass die Blockmenge  $\mathcal{B}_{\mathfrak{r}}$  ein  $t$ - $(v, k, \lambda)$  Design  $\mathcal{D}_{\mathfrak{r}} = (\mathcal{V}, \mathcal{B}_{\mathfrak{r}})$  mit  $A \leq \text{Aut}(\mathcal{D}_{\mathfrak{r}})$  definiert. Dazu sei  $T$  eine beliebige  $t$ -Teilmenge von  $\mathcal{V}$ . Dann gibt es einen Index  $i \leq \ell_t$  und ein Gruppenelement  $a \in A$  mit  $T \in \mathcal{O}_{t,i}$  und  $T^a = \mathcal{O}_{t,j}$ . Wegen

$$\begin{aligned} \lambda &= \sum_{j=1}^{\ell_k} m_{i,j} \cdot \mathfrak{r}(j) \\ &= \sum_{\substack{j=1 \\ \mathfrak{r}(j)=1}}^{\ell_k} |\{K \in \mathcal{O}_{k,j} \mid \mathcal{O}_{t,i} \subseteq K\}| \\ &= \sum_{\substack{j=1 \\ \mathfrak{r}(j)=1}}^{\ell_k} |\{K \in \mathcal{O}_{k,j} \mid \mathcal{O}_{t,i}^{a^{-1}} \subseteq K^{a^{-1}}\}| \\ &= \sum_{\substack{j=1 \\ \mathfrak{r}(j)=1}}^{\ell_k} |\{K \in \mathcal{O}_{k,j}^{a^{-1}} = \mathcal{O}_{k,j} \mid T \subseteq K\}| \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
&= \left| \left\{ K \in \bigcup_{\substack{j=1 \\ \mathfrak{P}(j)=1}}^{\ell_k} \mathcal{O}_{k,j} \mid T \subseteq K \right\} \right| \\
&= |\{K \in \mathcal{B}_{\mathfrak{r}} \mid T \subseteq K\}|
\end{aligned}$$

folgt, dass  $\mathcal{B}_{\mathfrak{r}}$  die Blockmenge eines  $t$ -( $v, k, \lambda$ ) Design ist. Als Vereinigung ganzer Bahnen unter  $A$  ist  $\mathcal{B}_{\mathfrak{r}}$  insbesondere unter der Gruppe  $A$  invariant. Demnach gilt  $A \leq \text{Aut}(\mathcal{D}_{\mathfrak{r}})$  und  $\mathcal{D}_{\mathfrak{r}} \in \mathfrak{D}_{t-(v,k,\lambda)}^A$ .

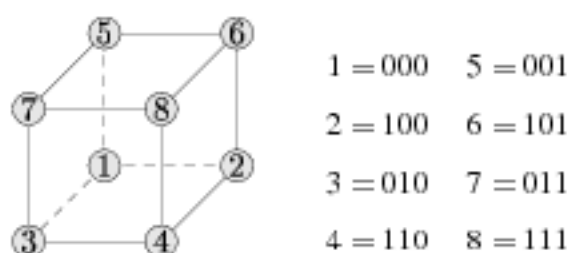
Zusätzlich verifiziert man leicht die Gleichungen

$$\mathcal{B}_{\mathfrak{r}\mathcal{B}} = \mathcal{B} \quad \text{und} \quad \mathfrak{r}\mathcal{B}_{\mathfrak{r}} = \mathfrak{r}.$$

Dies bedeutet, dass die angegebenen Abbildungen zwischen den Mengen  $\mathfrak{L}_{t-(v,k,\lambda)}^A$  und  $\mathfrak{D}_{t-(v,k,\lambda)}^A$  zueinander inverse Bijektionen sind. □

Die in diesem Satz betrachtete Matrix  $\mathcal{M}_{t,k}^A$  heißt auch *Kramer-Mesner Matrix* (nach [19]). Die Gleichung (3.1) heißt auch *Kramer-Mesner System*. Ein effizienter Algorithmus zur Lösung dieses Systems wird von Wassermann in [33] beschrieben. Ein umfangreiches Programmpaket zur Konstruktion von Designs mit vorgeschriebener Automorphismengruppe wurde vom Autor in einem DFG-geförderten Projekt an der Universität Bayreuth entwickelt. Das frei verfügbare Programm DISCRETA [3] automatisiert die dazu notwendigen Schritte und ist dank einer graphischen Benutzeroberfläche leicht benutzbar. Es läuft auf allen gängigen Unix-Systemen, insbesondere auf Linux. Das Programmpaket stellt eine Vielzahl von Gruppen bereit und ermöglicht es darüberhinaus, aus bestehenden Gruppen durch Kombination neue Gruppen zu konstruieren. Auf Knopfdruck kann dann die Kramer-Mesner Matrix berechnet werden. Das integrierte Programm von A. Wassermann dient der Suche nach Lösungen.

**3.1.2 Beispiel** Wir betrachten den dreidimensionalen Würfel, dessen Ecken wie in Abbildung 3.1 nummeriert sind. Wir sind auf der Suche nach Designs mit den

Abbildung 3.1: Der dreidimensionale Raum  $GF(2)^3$  als Würfel

Parametern  $3-(8, 4, 1)$ , wobei wir die 8 Eckpunkte des Würfels als Menge  $\mathcal{V}$  nehmen. Zusätzlich verlangen wird, dass die Designs unter der Gruppe  $A$  der eigentlichen Bewegungen des Würfels auf sich invariant sind. Diese Gruppe wird erzeugt von den Elementen

$$\begin{aligned}\alpha &= (1)(2, 3, 5)(6, 4, 7)(8), \\ \beta &= (1, 2, 4, 3)(5, 6, 8, 7)\end{aligned}$$

und ist isomorph zu  $\text{Sym}_4$ . Wir berechnen zunächst die Bahnen  $\mathcal{O}_{i,j}$  der Gruppe  $A$  auf  $i$ -Teilmengen. Die Anzahlen der Bahnen sind  $\ell_0 = 1$ ,  $\ell_1 = 1$ ,  $\ell_2 = 3$ ,  $\ell_3 = 3$ ,  $\ell_4 = 7$ . Tabelle 3.1 zeigt die Vertreter  $O_{i,j}$  der Bahnen. Die Ordnung des Stabilisators und die Bahnlänge sind im Index angezeigt. Nun stellen wir die Matrix  $\mathcal{M}_{3,4}^A$  auf (Abbildung 3.2). Jede Zeile und jede Spalte dieser Matrix ist einer 3- bzw. 4-Bahn zugeordnet. Der zugehörige Vertreter ist als Teilmenge der Eckenmenge des Würfels dargestellt. Das Gleichungssystem  $\mathcal{M}_{3,4}^A \cdot \mathbf{x}^\top = \mathbf{1}_{3 \times 1}$  besitzt genau vier Lösungen  $\mathbf{x}_i \in [0, 1]^7$ , welche die Menge  $\mathfrak{L}_{3-(8,4,1)}^A$  bilden:

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_1 &= (0, 0, 1, 0, 0, 0, 1), \\ \mathbf{x}_2 &= (0, 0, 0, 1, 0, 0, 1), \\ \mathbf{x}_3 &= (0, 0, 0, 0, 1, 1, 0), \\ \mathbf{x}_4 &= (1, 0, 0, 0, 0, 1, 1).\end{aligned}$$

$\mathcal{O}_{0,1}: \{1\}_{24,1}$	$\mathcal{O}_{4,1}: \{1, 2, 3, 4\}_{4,6}$
$\mathcal{O}_{1,1}: \{1\}_{3,8}$	$\mathcal{O}_{4,2}: \{1, 2, 3, 8\}_{1,24}$
$\mathcal{O}_{2,1}: \{1, 2\}_{2,12}$	$\mathcal{O}_{4,3}: \{1, 2, 3, 6\}_{2,12}$
$\mathcal{O}_{2,2}: \{1, 8\}_{6,4}$	$\mathcal{O}_{4,4}: \{1, 2, 3, 7\}_{2,12}$
$\mathcal{O}_{2,3}: \{1, 4\}_{2,12}$	$\mathcal{O}_{4,5}: \{1, 2, 3, 5\}_{3,8}$
$\mathcal{O}_{3,1}: \{1, 2, 3\}_{1,24}$	$\mathcal{O}_{4,6}: \{1, 2, 7, 8\}_{4,6}$
$\mathcal{O}_{3,2}: \{1, 2, 7\}_{1,24}$	$\mathcal{O}_{4,7}: \{1, 4, 6, 7\}_{12,2}$
$\mathcal{O}_{3,3}: \{1, 4, 6\}_{3,8}$	

Tabelle 3.1: Die Bahnen der Gruppe des Würfels auf Teilmengen

Die zugehörigen Designs  $\mathcal{D}_{\mathcal{F}_i} = (\mathcal{V}, \mathcal{B}_{\mathcal{F}_i})$  für  $i = 1, \dots, 4$  bilden die Menge  $\mathfrak{D}_{3-(8,4,1)}^A$ :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{D}_{\mathcal{F}_1} &= (\mathcal{V}, \mathcal{O}_{4,3} \cup \mathcal{O}_{4,7}) = (\mathcal{V}; \langle \text{Würfel}, \text{Würfel} \rangle; A), \\
 \mathcal{D}_{\mathcal{F}_2} &= (\mathcal{V}, \mathcal{O}_{4,4} \cup \mathcal{O}_{4,7}) = (\mathcal{V}; \langle \text{Würfel}, \text{Würfel} \rangle; A), \\
 \mathcal{D}_{\mathcal{F}_3} &= (\mathcal{V}, \mathcal{O}_{4,5} \cup \mathcal{O}_{4,6}) = (\mathcal{V}; \langle \text{Würfel}, \text{Würfel} \rangle; A), \\
 \mathcal{D}_{\mathcal{F}_4} &= (\mathcal{V}, \mathcal{O}_{4,1} \cup \mathcal{O}_{4,6} \cup \mathcal{O}_{4,7}) = (\mathcal{V}; \langle \text{Würfel}, \text{Würfel}, \text{Würfel} \rangle; A).
 \end{aligned}$$

◇

Einige der prominentesten  $t$ -Designs besitzen eine der Mathieugruppen als Automorphismengruppe. Sie wurden von Witt in [36] konstruiert. Hier das große Witt-Design zur Mathieu-Gruppe  $M_{24}$ :

**3.1.3 Beispiel** Die Gruppe  $M_{24}$  wird erzeugt von den Permutationen

$$\begin{aligned}
 &(1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9\ 10\ 11\ 12\ 13\ 14\ 15\ 16\ 17\ 18\ 19\ 20\ 21\ 22\ 23), \\
 &(3\ 17\ 10\ 7\ 9)(4\ 13\ 14\ 19\ 5)(8\ 18\ 11\ 12\ 23)(15\ 20\ 22\ 21\ 16),
 \end{aligned}$$











	 $\{1, 2, 3, 4\}_{4,6}$	 $\{1, 2, 3, 8\}_{1,24}$	 $\{1, 2, 3, 6\}_{2,12}$	 $\{1, 2, 3, 7\}_{2,12}$	 $\{1, 2, 3, 5\}_{3,8}$	 $\{1, 2, 7, 8\}_{4,6}$	 $\{1, 4, 6, 7\}_{12,2}$
 $\{1, 2, 3\}_{1,24}$	1	1	1	1	1	0	0
 $\{1, 2, 7\}_{1,24}$	0	2	1	1	0	1	0
 $\{1, 4, 6\}_{3,8}$	0	3	0	0	1	0	1

Abbildung 3.2: Die Kramer-Mesner Matrix  $\mathcal{M}_{3,4}^A$ 

(1 24)(2 23)(3 12)(4 16)(5 18)(6 10)(7 20)(8 14)(9 21)(11 17)(13 22)(15 19).

und hat 244823040 Elemente. Man stellt fest, dass die Parameter 5-(24, 8, 1) zulässig sind. Die Bahnen der Gruppe auf Teilmengen der Kardinalität kleiner oder gleich 8 sind wie folgt (im Index die Ordnung des Stabilisators):

**0-Bahnen :**1:  $\{1\}_{244823040}$ **1-Bahnen :**1:  $\{1\}_{10200960}$ **2-Bahnen :**1:  $\{1, 2\}_{887040}$ **3-Bahnen :**1:  $\{1, 2, 3\}_{120960}$ **4-Bahnen :**1:  $\{1, 2, 3, 4\}_{23040}$ **5-Bahnen :**1:  $\{1, 2, 3, 4, 5\}_{5760}$

**6-Bahnen :**1:  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}_{2160}$ 2:  $\{1, 2, 3, 4, 5, 8\}_{11520}$ **7-Bahnen :**1:  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}_{720}$ 2:  $\{1, 2, 3, 4, 5, 8, 11\}_{40320}$ **8-Bahnen :**1:  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}_{384}$ 2:  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 17\}_{2520}$ 3:  $\{1, 2, 3, 4, 5, 8, 11, 13\}_{322560}$ 

Es ergibt sich folgende Kramer-Mesner Matrix, seitlich wieder die zugehörigen Bahnrepräsentanten:

$$\mathcal{M}_{5,8}^{M_{24}} = \{1, 2, 3, 4, 5\}_{5760, 42504} \begin{pmatrix} 840 & 128 & 1 \end{pmatrix}$$

Das System  $\mathcal{M}_{5,8}^{M_{24}} \cdot \mathfrak{x}^T = (1)$  besitzt die offensichtliche Lösung  $\mathfrak{x} = (0, 0, 1)$ , d. h. die 759 Elemente der Bahn  $\mathcal{O}_{8,3}$  bilden ein blocktransitives, unter  $M_{24}$  invariantes 5-(24, 8, 1) Steiner-System.  $\diamond$

Da jedes  $t$ -Design mit  $t \geq 1$  gleichzeitig ein  $(t - 1)$ -Design ist, erhalten wir aus Satz 3.1.1 auch folgendes Resultat:

**3.1.4 Korollar** Sei  $\mathfrak{x} \in \mathfrak{L}_{t-(v,k,\lambda)}^A$  ein Lösungsvektor eines  $t$ -( $v, k, \lambda$ ) Designs mit vorgeschriebener Automorphismengruppe  $A$ . Dann gilt für alle  $i \leq t$ :

$$\mathcal{M}_{i,k}^A \cdot \mathfrak{x}^T = \lambda_i \cdot \mathbf{1}_{\ell_i \times 1}. \quad (3.2)$$

Mit anderen Worten,

$$\mathfrak{x} \in \mathfrak{L}_{i-(v,k,\lambda_i)}^A \text{ für } i \leq t. \quad (3.3)$$

### 3.2 Die Konstruktion von 8-(31, 10, $\lambda$ ) Designs

1998 konnte die Existenz von 8-(31, 10,  $\lambda$ ) Designs nachgewiesen werden (vgl. [4]). Die Designs wurden mit der Methode von Kramer und Mesner konstruiert, wobei die projektive Gruppe  $\text{PSL}(3, 5)$  als Automorphismengruppe vorgeschrieben wurde. Die 31 Elemente des projektiven Raumes  $\text{PG}(2, 5)$  lauten wie folgt:

$$\begin{array}{lllll}
 1 \hat{=} (1, 0, 0)^T & 8 \hat{=} (1, 0, 1)^T & 15 \hat{=} (3, 1, 1)^T & 22 \hat{=} (0, 3, 1)^T & 29 \hat{=} (2, 4, 1)^T \\
 2 \hat{=} (0, 1, 0)^T & 9 \hat{=} (2, 0, 1)^T & 16 \hat{=} (4, 1, 1)^T & 23 \hat{=} (1, 3, 1)^T & 30 \hat{=} (3, 4, 1)^T \\
 3 \hat{=} (1, 1, 0)^T & 10 \hat{=} (3, 0, 1)^T & 17 \hat{=} (0, 2, 1)^T & 24 \hat{=} (2, 3, 1)^T & 31 \hat{=} (4, 4, 1)^T \\
 4 \hat{=} (2, 1, 0)^T & 11 \hat{=} (4, 0, 1)^T & 18 \hat{=} (1, 2, 1)^T & 25 \hat{=} (3, 3, 1)^T & \\
 5 \hat{=} (3, 1, 0)^T & 12 \hat{=} (0, 1, 1)^T & 19 \hat{=} (2, 2, 1)^T & 26 \hat{=} (4, 3, 1)^T & \\
 6 \hat{=} (4, 1, 0)^T & 13 \hat{=} (1, 1, 1)^T & 20 \hat{=} (3, 2, 1)^T & 27 \hat{=} (0, 4, 1)^T & \\
 7 \hat{=} (0, 0, 1)^T & 14 \hat{=} (2, 1, 1)^T & 21 \hat{=} (4, 2, 1)^T & 28 \hat{=} (1, 4, 1)^T & 
 \end{array}$$

Die Gruppe  $\text{PSL}(3, 5)$  operiert auf diesen Elementen als Permutationsgruppe vom Grad 31. Die Gruppe wird durch folgende Elemente erzeugt:

$$\begin{aligned}
 & (1\ 2\ 6)(3\ 4\ 5)(8\ 12\ 16\ 11\ 27\ 28)(9\ 17\ 20\ 10\ 22\ 24)(13\ 21\ 15\ 31\ 23\ 29)(14\ 26\ 19\ 30\ 18\ 25), \\
 & (1\ 3\ 5\ 4\ 6)(8\ 13\ 18\ 23\ 28)(9\ 19\ 29\ 14\ 24)(10\ 25\ 15\ 30\ 20)(11\ 31\ 26\ 21\ 16), \\
 & (1\ 4\ 5\ 6)(8\ 21\ 18\ 16)(9\ 30\ 29\ 20)(10\ 14\ 15\ 24)(11\ 23\ 26\ 28)(12\ 17\ 27\ 22)(13\ 31)(19\ 25), \\
 & (1\ 7\ 27\ 6)(2\ 11)(3\ 9\ 22\ 15)(4\ 10\ 12\ 19)(5\ 8\ 17\ 23)(13\ 25\ 18\ 14)(16\ 31)(20\ 30\ 24\ 29).
 \end{aligned}$$

Die Gruppenordnung beträgt

$$\frac{(5^3 - 1)(5^3 - 5)(5^3 - 5^2)}{5 - 1} = (5^2 + 5 + 1)(5^2 - 1)(5 - 1)5^3 = 372000.$$

Tabelle 3.2 zeigt die Anzahlen der Bahnen von  $A = \text{PSL}(3, 5)$  auf  $i$ -Teilmengen von  $\mathcal{V} = \text{PG}(2, 5)$  für  $i \leq 10$ . Die anschließende Tabelle listet alle 10-Bahnen von  $A$  auf  $\mathcal{V}$ . Gezeigt wird jeweils der lexikographisch kleinste Vertreter einer jeden Bahn. Die Ordnung des Stabilisators der Vertretermenge ist im Index aufgeführt. Die Bahnlänge ist der Quotient aus Gruppenordnung und der

$i$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
# $i$ -Bahnen von $A$	1	1	1	2	3	5	12	22	42	92	174

Tabelle 3.2: Die Anzahlen der Bahnen von  $\text{PSL}(3, 5)$  auf  $i$ -Teilmengen von  $\text{PG}(2, 5)$

Ordnung des Stabilisators, Jeder Vertreter beginnt mit der Folge der natürlichen Zahlen 1, 2, 3, ... Aus Platzgründen wird nur das letzte Element dieser Serie gezeigt, das Anfangsstück wird durch das Auslassungszeichen (...) abgekürzt. Beispielsweise wird die Menge {1, 2, 3, 4, 5, 7, 16, 20, 24, 28} dargestellt als {..., 5, 7, 16, 20, 24, 28}.

**10-Bahnen:**

- |  |   |  |
|--|---|--|
| 1: {..., 5, 7, 16, 20, 24, 28} <sub>80</sub> | 27: {..., 5, 7, 8, 9, 14, 18} <sub>1</sub>      | 54: {..., 4, 7, 8, 12, 15, 18, 26} <sub>8</sub>  |
| 2: {..., 10} <sub>80</sub>                   | 28: {..., 5, 7, 8, 9, 13, 15} <sub>1</sub>      | 55: {..., 4, 7, 8, 12, 21, 25, 26} <sub>16</sub> |
| 3: {..., 5, 7, 8, 12, 21, 25} <sub>4</sub>   | 29: {..., 5, 7, 8, 12, 14, 19} <sub>1</sub>     | 56: {..., 4, 7, 8, 12, 16, 20, 29} <sub>4</sub>  |
| 4: {..., 9, 12} <sub>2</sub>                 | 30: {..., 5, 7, 8, 9, 12, 22} <sub>1</sub>      | 57: {..., 4, 7, 8, 12, 16, 20, 25} <sub>1</sub>  |
| 5: {..., 5, 7, 8, 12, 16, 20} <sub>2</sub>   | 31: {..., 5, 7, 8, 9, 12, 14} <sub>1</sub>      | 58: {..., 4, 7, 8, 12, 16, 20, 21} <sub>2</sub>  |
| 6: {..., 5, 7, 8, 12, 16, 24} <sub>2</sub>   | 32: {..., 5, 7, 8, 9, 12, 18} <sub>1</sub>      | 59: {..., 4, 7, 8, 12, 15, 19, 29} <sub>1</sub>  |
| 7: {..., 5, 7, 8, 12, 14, 25} <sub>1</sub>   | 33: {..., 5, 7, 8, 9, 13, 22} <sub>1</sub>      | 60: {..., 4, 7, 8, 9, 13, 20, 26} <sub>2</sub>   |
| 8: {..., 5, 7, 8, 9, 13, 17} <sub>1</sub>    | 34: {..., 5, 7, 8, 9, 13, 14} <sub>1</sub>      | 61: {..., 4, 7, 8, 9, 12, 20, 29} <sub>1</sub>   |
| 9: {..., 5, 7, 8, 9, 13, 30} <sub>2</sub>    | 35: {..., 5, 7, 8, 9, 13, 27} <sub>1</sub>      | 62: {..., 4, 7, 8, 9, 13, 20, 21} <sub>1</sub>   |
| 10: {..., 5, 7, 8, 12, 13, 21} <sub>2</sub>  | 36: {..., 5, 7, 8, 9, 14, 31} <sub>2</sub>      | 63: {..., 4, 7, 8, 12, 15, 19, 23} <sub>1</sub>  |
| 11: {..., 5, 7, 8, 9, 12, 21} <sub>2</sub>   | 37: {..., 5, 7, 8, 9, 12, 27} <sub>1</sub>      | 64: {..., 4, 7, 8, 9, 12, 16, 20} <sub>2</sub>   |
| 12: {..., 5, 7, 8, 9, 12, 29} <sub>4</sub>   | 38: {..., 5, 7, 8, 9, 13, 23} <sub>1</sub>      | 65: {..., 4, 7, 8, 9, 12, 13, 29} <sub>1</sub>   |
| 13: {..., 8, 12, 13} <sub>8</sub>            | 39: {..., 5, 7, 8, 9, 10, 12} <sub>2</sub>      | 66: {..., 4, 7, 8, 12, 16, 19, 29} <sub>1</sub>  |
| 14: {..., 8, 12, 14} <sub>4</sub>            | 40: {..., 5, 7, 8, 9, 10, 15} <sub>8</sub>      | 67: {..., 4, 7, 8, 9, 12, 19, 23} <sub>2</sub>   |
| 15: {..., 8, 12, 19} <sub>6</sub>            | 41: {..., 5, 7, 8, 9, 14, 19} <sub>2</sub>      | 68: {..., 4, 7, 8, 9, 12, 16, 17} <sub>1</sub>   |
| 16: {..., 5, 7, 8, 9, 12, 13} <sub>1</sub>   | 42: {..., 5, 7, 8, 9, 14, 27} <sub>4</sub>      | 69: {..., 4, 7, 8, 9, 12, 13, 21} <sub>1</sub>   |
| 17: {..., 5, 7, 8, 9, 12, 28} <sub>1</sub>   | 43: {..., 5, 7, 8, 9, 14, 15} <sub>2</sub>      | 70: {..., 4, 7, 8, 9, 12, 16, 29} <sub>2</sub>   |
| 18: {..., 5, 7, 8, 12, 14, 18} <sub>2</sub>  | 44: {..., 5, 7, 8, 13, 15, 22} <sub>20</sub>    | 71: {..., 4, 7, 8, 12, 16, 19, 20} <sub>2</sub>  |
| 19: {..., 5, 7, 8, 12, 14, 28} <sub>2</sub>  | 45: {..., 4, 7, 8, 12, 16, 20, 28} <sub>2</sub> | 72: {..., 4, 7, 8, 12, 15, 23, 29} <sub>2</sub>  |
| 20: {..., 5, 7, 8, 9, 13, 16} <sub>2</sub>   | 46: {..., 4, 7, 8, 12, 16, 20, 24} <sub>4</sub> | 73: {..., 4, 7, 8, 9, 13, 20, 24} <sub>1</sub>   |
| 21: {..., 5, 7, 8, 9, 13, 28} <sub>4</sub>   | 47: {..., 4, 7, 8, 12, 16, 21, 25} <sub>2</sub> | 74: {..., 4, 7, 8, 9, 12, 20, 26} <sub>6</sub>   |
| 22: {..., 5, 7, 8, 12, 13, 20} <sub>1</sub>  | 48: {..., 4, 7, 8, 12, 14, 25, 29} <sub>1</sub> | 75: {..., 4, 7, 8, 9, 12, 17, 20} <sub>1</sub>   |
| 23: {..., 5, 7, 8, 9, 12, 24} <sub>1</sub>   | 49: {..., 4, 7, 8, 9, 12, 19, 26} <sub>1</sub>  | 76: {..., 4, 7, 8, 12, 19, 20, 23} <sub>2</sub>  |
| 24: {..., 5, 7, 8, 9, 12, 17} <sub>2</sub>   | 50: {..., 4, 7, 8, 9, 12, 19, 28} <sub>1</sub>  | 77: {..., 4, 7, 8, 9, 12, 18, 29} <sub>1</sub>   |
| 25: {..., 5, 7, 8, 12, 14, 24} <sub>4</sub>  | 51: {..., 4, 7, 8, 12, 13, 21, 29} <sub>2</sub> | 78: {..., 4, 7, 8, 12, 16, 19, 23} <sub>2</sub>  |
| 26: {..., 5, 7, 8, 9, 13, 20} <sub>1</sub>   | 52: {..., 4, 7, 8, 9, 12, 18, 24} <sub>2</sub>  | 79: {..., 4, 7, 8, 12, 16, 21, 28} <sub>2</sub>  |
|  | 53: {..., 4, 7, 8, 9, 12, 18, 30} <sub>2</sub>  | 80: {..., 4, 7, 8, 9, 12, 18, 26} <sub>1</sub>   |

81: { ..., 4, 7, 8, 9, 12, 18, 20 } <sub>1</sub>	113: { ..., 4, 7, 8, 9, 12, 15, 17 } <sub>1</sub>	145: { ..., 4, 7, 8, 9, 12, 14, 21 } <sub>1</sub>
82: { ..., 4, 7, 8, 9, 13, 17, 20 } <sub>1</sub>	114: { ..., 4, 7, 8, 9, 12, 20, 21 } <sub>1</sub>	146: { ..., 4, 7, 8, 12, 15, 18, 21 } <sub>2</sub>
83: { ..., 4, 7, 8, 9, 12, 18, 31 } <sub>1</sub>	115: { ..., 4, 7, 8, 9, 12, 20, 28 } <sub>1</sub>	147: { ..., 4, 7, 8, 9, 13, 14, 18 } <sub>1</sub>
84: { ..., 4, 7, 8, 9, 12, 20, 24 } <sub>1</sub>	116: { ..., 4, 7, 8, 9, 12, 14, 20 } <sub>1</sub>	148: { ..., 4, 7, 8, 9, 13, 15, 17 } <sub>2</sub>
85: { ..., 4, 7, 8, 12, 13, 20, 24 } <sub>1</sub>	117: { ..., 4, 7, 8, 9, 13, 21, 27 } <sub>1</sub>	149: { ..., 4, 7, 8, 12, 13, 24, 26 } <sub>2</sub>
86: { ..., 4, 7, 8, 9, 12, 19, 31 } <sub>1</sub>	118: { ..., 4, 7, 8, 9, 12, 28, 31 } <sub>2</sub>	150: { ..., 4, 7, 8, 9, 14, 17, 18 } <sub>2</sub>
87: { ..., 4, 7, 8, 9, 12, 13, 20 } <sub>1</sub>	119: { ..., 4, 7, 8, 9, 12, 19, 21 } <sub>1</sub>	151: { ..., 4, 7, 8, 9, 12, 13, 27 } <sub>2</sub>
88: { ..., 4, 7, 8, 9, 12, 16, 19 } <sub>1</sub>	120: { ..., 4, 7, 8, 9, 12, 14, 19 } <sub>1</sub>	152: { ..., 4, 7, 8, 12, 15, 19, 20 } <sub>2</sub>
89: { ..., 4, 7, 8, 12, 13, 21, 24 } <sub>1</sub>	121: { ..., 4, 7, 8, 9, 12, 21, 31 } <sub>1</sub>	153: { ..., 4, 7, 8, 9, 13, 15, 27 } <sub>4</sub>
90: { ..., 4, 7, 8, 9, 12, 13, 18 } <sub>1</sub>	122: { ..., 4, 7, 8, 9, 12, 15, 18 } <sub>1</sub>	154: { ..., 4, 7, 8, 12, 13, 20, 30 } <sub>2</sub>
91: { ..., 4, 7, 8, 12, 13, 21, 26 } <sub>1</sub>	123: { ..., 4, 7, 8, 9, 13, 14, 17 } <sub>1</sub>	155: { ..., 4, 7, 8, 9, 12, 13, 15 } <sub>2</sub>
92: { ..., 4, 7, 8, 9, 12, 21, 24 } <sub>2</sub>	124: { ..., 4, 7, 8, 9, 12, 13, 19 } <sub>1</sub>	156: { ..., 4, 7, 8, 9, 13, 15, 28 } <sub>2</sub>
93: { ..., 4, 7, 8, 9, 12, 15, 29 } <sub>1</sub>	125: { ..., 4, 7, 8, 9, 14, 17, 25 } <sub>2</sub>	157: { ..., 4, 7, 8, 9, 12, 14, 16 } <sub>4</sub>
94: { ..., 4, 7, 8, 9, 13, 17, 28 } <sub>1</sub>	126: { ..., 4, 7, 8, 12, 14, 25, 28 } <sub>1</sub>	158: { ..., 4, 7, 8, 9, 12, 16, 27 } <sub>8</sub>
95: { ..., 4, 7, 8, 9, 12, 15, 20 } <sub>1</sub>	127: { ..., 4, 7, 8, 9, 12, 14, 28 } <sub>1</sub>	159: { ..., 4, 7, 8, 9, 12, 13, 16 } <sub>6</sub>
96: { ..., 4, 7, 8, 12, 14, 28, 29 } <sub>1</sub>	128: { ..., 4, 7, 8, 9, 13, 21, 24 } <sub>2</sub>	160: { ..., 4, 7, 8, 9, 12, 13, 14 } <sub>6</sub>
97: { ..., 4, 7, 8, 9, 12, 19, 20 } <sub>1</sub>	129: { ..., 4, 7, 8, 9, 12, 17, 18 } <sub>1</sub>	161: { ..., 4, 7, 8, 9, 13, 14, 27 } <sub>6</sub>
98: { ..., 4, 7, 8, 12, 14, 18, 29 } <sub>1</sub>	130: { ..., 4, 7, 8, 9, 12, 18, 25 } <sub>2</sub>	162: { ..., 4, 7, 8, 9, 14, 17, 21 } <sub>3</sub>
99: { ..., 4, 7, 8, 9, 17, 20, 25 } <sub>1</sub>	131: { ..., 4, 7, 8, 9, 12, 27, 28 } <sub>1</sub>	163: { ..., 4, 7, 8, 9, 12, 14, 27 } <sub>2</sub>
100: { ..., 4, 7, 8, 9, 12, 16, 28 } <sub>2</sub>	132: { ..., 4, 7, 8, 9, 12, 13, 28 } <sub>1</sub>	164: { ..., 4, 7, 8, 12, 14, 18, 19 } <sub>4</sub>
101: { ..., 4, 7, 8, 9, 12, 13, 17 } <sub>1</sub>	133: { ..., 4, 7, 8, 9, 12, 15, 19 } <sub>1</sub>	165: { ..., 4, 7, 8, 9, 12, 14, 15 } <sub>2</sub>
102: { ..., 4, 7, 8, 9, 17, 19, 23 } <sub>1</sub>	134: { ..., 4, 7, 8, 9, 12, 14, 18 } <sub>1</sub>	166: { ..., 4, 7, 8, 9, 13, 18, 25 } <sub>20</sub>
103: { ..., 4, 7, 8, 9, 12, 15, 27 } <sub>2</sub>	135: { ..., 4, 7, 8, 9, 12, 19, 27 } <sub>1</sub>	167: { ..., 4, 7, 8, 9, 13, 14, 15 } <sub>12</sub>
104: { ..., 4, 7, 8, 9, 12, 18, 19 } <sub>1</sub>	136: { ..., 4, 7, 8, 9, 12, 18, 21 } <sub>1</sub>	168: { ..., 3, 7, 8, 12, 15, 19, 20, 23 } <sub>2</sub>
105: { ..., 4, 7, 8, 9, 17, 18, 26 } <sub>2</sub>	137: { ..., 4, 7, 8, 12, 13, 20, 21 } <sub>1</sub>	169: { ..., 3, 7, 8, 12, 13, 20, 21, 24 } <sub>3</sub>
106: { ..., 4, 7, 8, 9, 12, 17, 26 } <sub>3</sub>	138: { ..., 4, 7, 8, 12, 20, 21, 28 } <sub>4</sub>	170: { ..., 3, 7, 8, 12, 14, 21, 24, 28 } <sub>2</sub>
107: { ..., 4, 7, 8, 9, 17, 19, 26 } <sub>1</sub>	139: { ..., 4, 7, 8, 9, 13, 17, 21 } <sub>1</sub>	171: { ..., 3, 7, 8, 12, 14, 21, 28, 31 } <sub>4</sub>
108: { ..., 4, 7, 8, 9, 12, 15, 28 } <sub>1</sub>	140: { ..., 4, 7, 8, 12, 14, 18, 25 } <sub>1</sub>	172: { ..., 3, 7, 8, 12, 15, 19, 21, 26 } <sub>24</sub>
109: { ..., 4, 7, 8, 9, 12, 15, 21 } <sub>1</sub>	141: { ..., 4, 7, 8, 9, 13, 18, 20 } <sub>2</sub>	173: { ..., 3, 7, 8, 12, 14, 18, 21, 31 } <sub>3</sub>
110: { ..., 4, 7, 8, 9, 12, 19, 24 } <sub>1</sub>	142: { ..., 4, 7, 8, 9, 13, 14, 20 } <sub>1</sub>	174: { ..., 3, 7, 8, 13, 21, 24, 29, 30 } <sub>120</sub>
111: { ..., 4, 7, 8, 9, 12, 18, 27 } <sub>1</sub>	143: { ..., 4, 7, 8, 9, 13, 15, 20 } <sub>2</sub>	
112: { ..., 4, 7, 8, 9, 17, 20, 23 } <sub>1</sub>	144: { ..., 4, 7, 8, 12, 14, 24, 25 } <sub>2</sub>	

Tabellen 3.3 und 3.4 zeigen die  $(42 \times 174)$ -Kramer-Mesner Matrix  $\mathcal{M}_{8,10}^{\text{PSL}(3,5)}$ . Um jeden Matrixeintrag mit einem einzigen Zeichen darstellen zu können, wurden zweistellige Zahlen durch Buchstaben ersetzt:

$$a \hat{=} 10, \quad b \hat{=} 11, \quad c \hat{=} 12, \dots$$

Die Werte 40, 60 und 120 werden als A, B und C dargestellt.

Es gibt Designs zu  $\lambda = 93$  und  $\lambda = 100$ . Genauer haben die Lösungsmengen







die Kardinalitäten:

$$|\mathfrak{L}_{8-(31,10,93)}^A| = 138,$$

$$|\mathfrak{L}_{8-(31,10,100)}^A| = 1658.$$

Jeder Lösungsvektor  $\mathfrak{r} \in \mathfrak{L}_{8-(31,10,\lambda)}^A$  erzeugt wie in Satz 3.1.1 beschrieben ein Design  $\mathcal{D}_{\mathfrak{r}} = (\mathcal{V}, \mathcal{B}_{\mathfrak{r}})$ . Wir geben die Designs schlicht durch Auflisten der Bahnindizes  $j$  mit  $\mathfrak{r}(j) = 1$  an. Die ersten drei Designs im Falle  $\lambda = 93$  sind

$\mathcal{D}_{\mathfrak{r}_1}$  : 1, 2, 5, 7, 9, 12, 13, 14, 16, 19, 24, 25, 29, 30, 33, 36, 39, 42, 43, 46, 48, 52, 53, 55, 57, 60, 64, 65, 72, 75, 76, 81, 83, 84, 85, 91, 92, 94, 96, 98, 103, 105, 107, 109, 113, 114, 116, 120, 124, 125, 126, 128, 131, 132, 136, 138, 139, 141, 147, 148, 149, 150, 152, 159, 162, 167, 168, 172.

$\mathcal{D}_{\mathfrak{r}_2}$  : 1, 2, 5, 7, 9, 12, 13, 14, 16, 19, 24, 25, 29, 30, 35, 36, 39, 42, 43, 46, 49, 52, 53, 55, 57, 60, 63, 69, 70, 72, 75, 78, 80, 84, 85, 90, 94, 95, 98, 100, 101, 103, 104, 105, 110, 116, 117, 121, 122, 125, 128, 130, 134, 135, 137, 138, 139, 143, 147, 148, 149, 152, 156, 159, 163, 167, 169, 170, 172.

$\mathcal{D}_{\mathfrak{r}_3}$  : 1, 2, 5, 8, 11, 12, 13, 14, 17, 19, 24, 25, 28, 29, 33, 36, 39, 42, 43, 46, 47, 48, 52, 55, 58, 60, 62, 64, 66, 71, 75, 76, 77, 78, 81, 85, 88, 90, 94, 97, 98, 105, 109, 111, 113, 116, 118, 119, 120, 125, 126, 127, 131, 132, 133, 136, 138, 140, 145, 146, 149, 151, 152, 159, 167, 169, 172.

### 3.3 Liste von $t$ -Designs mit großem $t$

In diesem Abschnitt sollen einige Existenzaussagen für  $t$ -Designs mit großem  $t$  zusammengestellt werden. Die Ergebnisse wurden, sofern nicht anders erwähnt, innerhalb der Forschergruppe der Universität Bayreuth um Prof. Dr. R. Laue erzielt.

Zunächst benötigt man Permutationsgruppen, deren Grad verhältnismäßig klein ist. Eine ausführliche Liste der primitiven Gruppen vom Grad kleiner oder gleich 50 sowie der einfachen Gruppen findet man in dem Beitrag „Finite Groups and Designs“ von Chouinard II, Jajacay und Magliveras im „Handbook of Combinatorial Designs“ von Colbourn und Dinitz [9, Seiten 587-614].

Eine weitere Quelle für Gruppen ist der von Robert A. Wilson und anderen unterhaltene ATLAS der Gruppendarstellungen [35].

Parameter	Gruppe $A$ , $ A $ , Format von $\mathcal{M}_{t,k}^A$ , Lösungen für
8-(40,11,1440)	$\text{PSL}(4, 3)$ , 6065280, $53 \times 569$ , $(\Delta\lambda = 40)$
8-(36,11,1260)	$\text{Sp}(6, 2)$ , 1451520, $79 \times 694$ , $(\Delta\lambda = 84)$
8-(31,10, $\lambda$ )	$\text{PSL}(3, 5)$ , 372000, $42 \times 174$ , $\lambda = 93, 100$ [4] $(\Delta\lambda = 1)$
8-(28,14, $\lambda$ )	$\text{ASL}(3, 3)_+$ , 151632, $48 \times 352$ , $\lambda = 14040, 18600$ $(\Delta\lambda = 60)$
8-(28,13, $\lambda$ )	$\text{ASL}(3, 3)_+$ , 151632, $48 \times 330$ , $\lambda = 5832, 7080, 7128$ $(\Delta\lambda = 24)$
8-(27,13, $\lambda$ )	$\text{ASL}(3, 3)$ , 151632, $31 \times 176$ , $\lambda = 3204, 3240, 4608, 5076, 5148$ $(\Delta\lambda = 18)$
8-(27,12, $\lambda$ )	$\text{ASL}(3, 3)$ , 151632, $31 \times 154$ $\lambda = 1296, 1932$ $(\Delta\lambda = 6)$
8-(27,11,432)	$\text{ASL}(3, 3)$ , 151632, $31 \times 121$ $(\Delta\lambda = 3)$

Tabelle 3.5: 8-Designs mit vorgeschriebener Automorphismengruppe

Parameter	Gruppe $A$ , $ A $ , Format von $\mathcal{M}_{l,k}^A$ , Lösungen für
7-(40,11, $\lambda$ )	PSL(4, 3), 6065280, $24 \times 569$ , $\lambda = 8250, 11220, 14190, 14850, 17820$ ( $\Delta\lambda = 330$ )
7-(40,10, $\lambda$ )	PSL(4, 3), 6065280, $24 \times 263$ , $\lambda = 560, 1008, 1208, 1296, 1568, 1656, 2304, 2504$ ( $\Delta\lambda = 4$ )
7-(36,11, $\lambda$ )	Sp(6, 2), 1451520, $37 \times 694$ , $\lambda = 3360, 4200, 4536, 4935, 5040, 5271, 5376, 5775, 5880, 6111, 6216, 6615, 6720, 7056, 7455, 7560, 7791, 7896, 8295, 8400, 8631, 8736, 9135, 9240, 9471, 9576, 9975, 10080, 10311, 10416, 10815, 10920, 11151, 11655, 11760$ ( $\Delta\lambda = 21$ )
7-(34,9, $\lambda$ )	PGL(2, 32)+, 163680, $45 \times 345$ , $\lambda = 135, 171$ ( $\Delta\lambda = 9$ )
7-(33,10, $\lambda$ )	PGL(2, 32), 163680, $32 \times 596$ , $\lambda = 600, 720, 840, 880$ ( $\Delta\lambda = 40$ )
7-(33,9, $\lambda$ )	PGL(2, 32), 163680, $32 \times 248$ , $\lambda = 60, 65, 80, 85, 100, 105, 120, 125, 140, 145, 160$ ( $\Delta\lambda = 5$ )
7-(33,8,10)	PGL(2, 32), 163680, $32 \times 97$ , ( $\Delta\lambda = 2$ )
7-(31,10, $\lambda$ )	PSL(3, 5), 372000, $22 \times 174$ , $\lambda = 480, 744, 800$ ( $\Delta\lambda = 8$ )
7-(30,9, $\lambda$ )	PGL(2, 27) ++, 58968, $61 \times 307$ , $\lambda = 105, 112$ [5] ( $\Delta\lambda = 1$ )
7-(29,11, $\lambda$ )	PGL(2, 27)+, 58968, $43 \times 647$ , $\lambda = 2130, 3465$ ( $\Delta\lambda = 385$ )
7-(29,10,420)	PGL(2, 27)+, 58968, $43 \times 391$ , [5] ( $\Delta\lambda = 140$ )
7-(28,14, $\lambda$ )	Sp(6, 2), 1451520, $16 \times 103$ , $\lambda = 23040, 30240, 32760, 35280, 37800, 38160, 40320, 40680, 42840, 43200, 45720, 48240, 50760, 52920, 53280, 55440, 55800, 57960$ ( $\Delta\lambda = 180$ )

Tabelle 3.6: 7-Designs mit vorgeschriebener Automorphismengruppe (Teil 1)

Parameter	Gruppe $A$ , $ A $ , Format von $\mathcal{M}_{t,k}^A$ , Lösungen für
7-(28,14, $\lambda$ )	AGL(3, 3)+, 303264, $\times \lambda = 30420, 44460, 51480$ [31] ( $\Delta\lambda = 180$ )
7-(28,13, $\lambda$ )	Sp(6, 2), 1451520, $16 \times 101$ , $\lambda = 10080, 15120, 17640,$ $18984, 20160, 21504, 22680, 24024, 25200, 26544$ ( $\Delta\lambda =$ 84)
7-(28,13,24780)	AGL(3, 3)+, 303264, $26 \times 241$ ( $\Delta\lambda = 84$ )
7-(28,10,630)	PGL(2, 27), 58968, $29 \times 257$ , [5] ( $\Delta\lambda = 70$ )
7-(27,13, $\lambda$ )	AGL(3, 3), 303264, $16 \times 127$ $\lambda = 10140, 14820,$ $17160$ [31] ( $\Delta\lambda = 60$ )
7-(27,12, $\lambda$ )	ASL(3, 3), 151632, $17 \times 154$ , $\lambda = 1896, 1944, 5832, 7080,$ $7128, 8376$ ( $\Delta\lambda = 24$ )
7-(27,12, $\lambda$ )	AGL(3, 3), 303264, $16 \times 114$ $\lambda = 2544, 2592, 3192, 3840,$ $3888, 4536, 5136, 5184, 6432, 6480, 7728$ [31] ( $\Delta\lambda = 24$ )
7-(27,11, $\lambda$ )	ASL(3, 3), 151632, $17 \times 121$ , $\lambda = 540, 675, 765, 810, 840,$ $900, 930, 945, 1035, 1080, 1110, 1170, 1200, 1335, 1380,$ $1515, 1650, 1755, 1875, 1890, 2010, 2115, 2250$ ( $\Delta\lambda = 15$ )
7-(27,11, $\lambda$ )	AGL(3, 3), 303264, $16 \times 91$ $\lambda = 1215, 1305, 1350, 1440,$ $1470, 1485, 1575, 1605, 1620, 1710, 1740, 1785, 1845,$ $1920, 1980, 2025, 2055, 2145, 2160, 2190, 2280, 2295,$ $2325, 2385, 2415$ [31] ( $\Delta\lambda = 15$ )
7-(27,11, $\lambda$ )	U(4, 2), 25920, $77 \times 668$ , $\lambda = 1500, 1860, 2385, 2400$ ( $\Delta\lambda = 15$ )
7-(27,10, $\lambda$ )	PGL(2, 25)+, 31200, $53 \times 355$ , $\lambda = 240, 540$ [5] ( $\Delta\lambda = 60$ )
7-(27,10,420)	U(4, 2), 25920, $77 \times 458$ , ( $\Delta\lambda = 60$ )

Tabelle 3.7: 7-Designs mit vorgeschriebener Automorphismengruppe (Teil 2)

Parameter	Gruppe $A$ , $ A $ , Format von $\mathcal{M}_{t,k}^A$ , Lösungen für
7-(26,8,6)	$\text{PGL}(2, 25)$ , 15600, $54 \times 131$ , [6] ( $\Delta\lambda = 1$ )
7-(26,9, $\lambda$ )	$\text{PGL}(2, 25)$ , 31200, $34 \times 132$ , $\lambda = 54, 63, 81$ [6] ( $\Delta\lambda = 9$ )
7-(26,11, $\lambda$ )	$\text{PGL}(2, 25)$ , 31200, $34 \times 293$ , $\lambda = 1176, 1356, 1536, 1716, 1896, 1926$ ( $\Delta\lambda = 6$ )
7-(26,12,5796)	$\text{PGL}(2, 25)$ , 31200, $34 \times 379$ ( $\Delta\lambda = 18$ )
7-(24,8, $\lambda$ )	$\text{PSL}(2, 23)$ , 6072, $57 \times 143$ , $\lambda = 4, 5, 6, 7, 8$ [6] ( $\Delta\lambda = 1$ )
7-(24,9, $\lambda$ )	$\text{PGL}(2, 23)$ , 12144, $36 \times 125$ , $\lambda = 40, 48, 64$ [6] ( $\Delta\lambda = 4$ )
7-(24,10, $\lambda$ )	$\text{PGL}(2, 23)$ , 12144, $36 \times 196$ , $\lambda = 240, 320, 340$ [5],[24] ( $\Delta\lambda = 20$ )
7-(22,11, $\lambda$ )	$\text{PGL}(2, 19)++$ , 6840, $49 \times 154$ , $\lambda = 315, 630$ ( $\Delta\lambda = 105$ )
7-(20,10, $\lambda$ )	$\text{PSL}(2, 19)$ , 3420, $26 \times 74$ , $\lambda = 116, 124, 134$ [5] ( $\Delta\lambda = 2$ )
7-(20,10,126)	$(\text{PGL}(2, 8) \times C_2)++$ , 1008, $111 \times 244$ , ( $\Delta\lambda = 2$ )

Tabelle 3.8: 7-Designs mit vorgeschriebener Automorphismengruppe (Teil 3)





## Kapitel 4

### Der Plesken-Ring

In seiner Arbeit „Counting with Groups and Rings“ [28] von 1982 betrachtet Plesken Gruppenoperationen auf Verbänden oder, allgemeiner, auf Halbgruppen. Er bestimmt die Anzahl der Lösungen von Gleichungen in Halbgruppen, wobei die Variablen zu festen Bahnen der Gruppe gehören. Diese Anzahlen bilden den Ausgangspunkt einer eigenen Theorie, im Verlaufe derer ein Ring eine besondere Rolle spielt. Dieser Ring, ich nenne ihn den Plesken-Ring, kann auf zwei Weisen realisiert werden. Zunächst bilden die unter der Gruppenoperation invarianten Elemente im ganzzahligen Halbgruppenring über den Elementen des Verbandes einen solchen Ring. Leichter zu handhaben ist dann die zweite, isomorphe Realisierung des Rings als  $\mathbb{Z}$ -Modul mit Multiplikation, wobei das Hadamard Produkt die Rolle der Multiplikation einnimmt. Diese Version bietet sich für effiziente Anwendungen besonders an. Wir werden im Kapitel 5 darauf zurückgreifen.

In den Abschnitten 4.1 und 4.2 werden die Grundlagen der Theorie vorgestellt, zunächst das Konzept der Gruppenoperationen auf Verbänden und dann der damit zusammenhängende Plesken-Ring (wir werden sehen, dass es sogar zwei Plesken-Ringe gibt). Auch die Plesken-Matrizen werden eingeführt. Im Abschnitt 4.3 werden Verbände mit Rangfunktion betrachtet, und damit die Anzahl der Indizes verdoppelt. Das bedeutet aber gleichzeitig, dass die Plesken-Matrizen eine Blockzer-

legung erfahren. In Abschnitt 4.4 betrachten wir speziell den Teilmengenverband. Neben einigen wichtigen Resultaten wie Rekursions- und Inversionsformeln für die Plesken-Matrizen wird hier der Zusammenhang zur Konstruktion von Designs deutlich: Es zeigt sich (Lemma 4.4.2), dass die Kramer-Mesner Matrix nichts anderes ist als ein Ausschnitt der Plesken-Matrix der Operation der vorgeschriebenen Gruppe auf dem Teilmengenverband.

Ausführlich wird diese Theorie auch von Kerber [13, Kapitel 8] behandelt.

## 4.1 Gruppenoperationen auf Verbänden

Wir beginnen mit dem Konzept einer *Gruppenoperation auf einer Halbgruppe*. Sei  $A$  eine Gruppe und  $(M, \circ)$  eine Halbgruppe.  $A$  operiert auf  $M$ , falls für alle  $x, y \in M$  und alle  $a \in A$  gilt

$$(x \circ y)^a = x^a \circ y^a.$$

In diesem Fall nennen wir die Gruppenoperation von  $A$  auf  $M$  mit der Halbgruppenstruktur *verträglich*.

Eine *Halbordnung* (Poset) auf einer Menge  $P$  ist eine Relation  $\leq$  mit

$$(PO1) \quad x \leq x,$$

$$(PO2) \quad x \leq y \text{ und } y \leq x \Rightarrow x = y,$$

$$(PO3) \quad x \leq y \text{ und } y \leq z \Rightarrow x \leq z$$

für alle  $x, y, z \in P$ . Eine Teilmenge  $M \subseteq P$ , in der alle Elemente vergleichbar sind, d. h. in der entweder  $x \leq y$  oder  $y \leq x$  für je zwei Elemente  $x, y \in M$  gilt, heißt *vollständig geordnet* oder *Kette*. Eine Teilmenge  $M \subseteq P$ , in der keine zwei Elemente vergleichbar sind, heißt *Antikette*.

Eine Gruppe  $A$  operiert auf dem Poset  $(P, \leq)$ , falls

$$x \leq y \Rightarrow x^a \leq y^a$$

für alle  $x, y \in P$  und alle  $a \in A$  gilt,

Sei jetzt  $(P, \leq)$  ein Poset und  $M$  eine Teilmenge von  $P$ . Eine *obere (untere) Schranke* von  $M$  ist ein Element  $w$  mit  $m \leq w$  ( $m \geq w$ ) für alle  $m \in M$ .

Die *kleinste obere Schranke* von  $M$  ist eine obere Schranke  $w$  mit der Eigenschaft, dass  $w \leq w'$  für jede weitere obere Schranke  $w'$  gilt. Man nennt dieses Element auch *Supremum* von  $M$ . Wenn das Supremum einer Menge existiert, so ist es eindeutig bestimmt.

Die *größte untere Schranke* von  $M$  ist eine untere Schranke  $w$  mit der Eigenschaft, dass  $w \geq w'$  für jede weitere untere Schranke  $w'$  gilt. Man nennt dieses Element auch *Infimum* von  $M$ . Wenn das Infimum einer Menge existiert, so ist es eindeutig bestimmt.

Falls das Supremum einer Menge  $M$  existiert, so schreiben wir dafür  $\bigvee_{m \in M} m$  oder  $\bigvee M$ . Für das Supremum zweier Elemente  $x$  und  $y$  schreiben wir  $x \vee y$ . Falls das Infimum einer Menge  $M$  existiert, so schreiben wir dafür  $\bigwedge_{m \in M} m$  oder  $\bigwedge M$ . Für das Infimum zweier Elemente  $x$  und  $y$  schreiben wir  $x \wedge y$ .

Eine Menge  $P$  heißt *Verband*, wenn gilt:

(V0a)  $(P, \leq)$  ist ein Poset,

(V0b) Je zwei Elemente von  $P$  haben ein Infimum und ein Supremum,

Ein Verband heißt *vollständig*, falls zu jeder Teilmenge von Elementen das Supremum und Infimum existiert. Endliche Verbände sind also immer vollständig.

Die folgende Bemerkung charakterisiert die Operationen  $\vee$  und  $\wedge$ :

**4.1.1 Bemerkung** Sei  $(\mathcal{L}, \vee, \wedge)$  ein Verband. Dann gilt für alle  $x, y, z \in \mathcal{L}$ :

(V1)  $x \vee y = y \vee x$  und  $x \wedge y = y \wedge x$  (Kommutativität),

(V2)  $(x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z)$  und  $(x \wedge y) \wedge z = x \wedge (y \wedge z)$  (Assoziativität),

(V3)  $x \vee x = x$  und  $x \wedge x = x$  (Idempotenz),

(V4)  $(x \vee y) \wedge x = x$  und  $(x \wedge y) \vee x = x$  (Absorptionsgesetz).

Andererseits ist jede Menge  $M$ , auf der zwei Verknüpfungen  $\vee$  und  $\wedge$  erklärt sind, die (V1)-(V4) erfüllen, bereits ein Verband:

**4.1.2 Bemerkung** Sei  $M$  eine Menge mit zwei binären Verknüpfungen  $\vee$  und  $\wedge$ , die (V1) bis (V4) erfüllen. Dann ist  $M$  ein Verband bezüglich der durch

$$x \leq y : \iff x \vee y = y \quad ( \iff x \wedge y = x ) \quad (4.1)$$

für alle  $x, y \in M$  erklärten Ordnung.

Dies zusammen liefert die Äquivalenz

$$(V0a) \wedge (V0b) \iff (V1) \wedge (V2) \wedge (V3) \wedge (V4).$$

Demnach ist es gleichwertig, ob in einem Verband die Ordnungsrelation oder die Verknüpfungen  $\vee$  und  $\wedge$  spezifiziert werden. Wir schreiben wahlweise  $(M, \leq)$  oder  $(M, \vee, \wedge)$ .

Eine *Gruppenoperation auf einem Verband* ist eine Operation einer Gruppe  $A$  auf den Elementen eines Verbandes  $(\mathcal{L}, \vee, \wedge)$ , welche kompatibel mit den Operatoren Supremum und Infimum ist, für die also

$$(x \vee y)^a = x^a \vee y^a \quad \text{und} \quad (x \wedge y)^a = x^a \wedge y^a$$

für alle  $x, y \in \mathcal{L}$  und alle  $a \in A$  gilt.

**4.1.3 Bemerkung** Sei  $(\mathcal{L}, \vee, \wedge)$  ein Verband mit zugehöriger Ordnungsrelation  $\leq$ . Sei  $A$  eine Gruppe, die auf den Elementen von  $\mathcal{L}$  operiert. Dann sind äquivalent:

- (i)  $A$  operiert auf dem Verband  $\mathcal{L}$  als Verbandsoperation, d. h.  $(x \vee y)^a = x^a \vee y^a$  und  $(x \wedge y)^a = x^a \wedge y^a$  für alle  $x, y \in \mathcal{L}, a \in A$ .

- (ii)  $A$  operiert auf dem Poset  $(\mathcal{L}, \leq)$ , d. h.  $x \leq y \Rightarrow x^a \leq y^a$  für alle  $x, y \in \mathcal{L}$ ,  
 $a \in A$ ,

*Beweis:* Kerber [13, Lemma 5.1.11, Seite 145].  $\square$

Wir betrachten nun die Operation der Gruppe  $A$  auf der endlichen Halbgruppe  $(M, \circ)$ . Seien  $\mathcal{O}_1, \dots, \mathcal{O}_\ell$  die Bahnen von  $A$  auf  $M$ . Ferner seien  $o_1, \dots, o_\ell$  Vertreterelemente der Bahnen, d. h.  $o_i \in \mathcal{O}_i$  für  $1 \leq i \leq \ell$ . Für  $1 \leq i, j, k \leq \ell$  definieren wir

$$\alpha_{ijk}^\circ := |\{(x, y) \in \mathcal{O}_i \times \mathcal{O}_j \mid x \circ y = o_k\}|. \quad (4.2)$$

Diese Anzahl ist unabhängig von der Wahl des Repräsentanten  $o_k \in \mathcal{O}_k$ : Denn für jeden anderen Repräsentanten  $o_k^a$  aus der Bahn  $\mathcal{O}_k$  gilt

$$\begin{aligned} |\{(x, y) \in \mathcal{O}_i \times \mathcal{O}_j \mid x \circ y = o_k^a\}| &= |\{(x, y) \in \mathcal{O}_i \times \mathcal{O}_j \mid x^{a^{-1}} \circ y^{a^{-1}} = o_k\}| \\ &= |\{(x, y) \in \mathcal{O}_i^{a^{-1}} \times \mathcal{O}_j^{a^{-1}} \mid x \circ y = o_k\}| \\ &= |\{(x, y) \in \mathcal{O}_i \times \mathcal{O}_j \mid x \circ y = o_k\}| \\ &= \alpha_{ijk}^\circ. \end{aligned}$$

Das Supremum aller Elemente eines endlichen Verbandes wird *Einselement* genannt. Das Infimum aller Elemente eines endlichen Verbandes wird *Nullelement* genannt:

$$1_{\mathcal{L}} := \bigvee_{x \in \mathcal{L}} x, \quad 0_{\mathcal{L}} := \bigwedge_{x \in \mathcal{L}} x.$$

Ein Verband  $(\mathcal{L}, \vee, \wedge)$  besteht aus zwei Halbgruppen  $(\mathcal{L}, \vee)$  und  $(\mathcal{L}, \wedge)$ . Das folgende Lemma stellt einige Aussagen von endlichen Verbandsoperationen zusammen, die sich unter anderem aus den zugehörigen Operationen auf den Halbgruppen ergeben,

**4.1.4 Lemma** (Plesken [28]) *Die Gruppe  $A$  operiere auf dem endlichen Verband  $(\mathcal{L}, \vee, \wedge)$  ordnungstreu. Dann gilt:*

- (i) Je zwei Elemente derselben  $A$ -Bahn sind unvergleichbar (d. h. die Bahnen bilden Antiketten).
- (ii)  $0_{\mathcal{L}}$  und  $1_{\mathcal{L}}$  sind einelementige  $A$ -Bahnen.
- (iii) Die Bahnen von  $A$  auf  $\mathcal{L}$  bilden ein Poset in Bezug auf die Ordnung

$$\mathcal{O} < \mathcal{O}' : \iff \exists x \in \mathcal{O}, \exists y \in \mathcal{O}' : x \leq y.$$

Wir können die Bahnen als  $\mathcal{O}_1, \dots, \mathcal{O}_\ell$  so nummerieren, dass  $\mathcal{O}_i < \mathcal{O}_j \Rightarrow i \leq j$  gilt. Eine solche Nummerierung heißt topologische Nummerierung. In diesem Fall ist  $\mathcal{O}_1 = \{0_{\mathcal{L}}\}$  und  $\mathcal{O}_\ell = \{1_{\mathcal{L}}\}$ .

- (iv) Wir setzen  $\alpha_{i,j}^\vee := \alpha_{ijj}^\vee$  und  $\alpha_{i,j}^\wedge := \alpha_{jii}^\wedge$  für  $i, j \leq \ell$ . Dann gilt

$$\alpha_{i,j}^\vee = |\{x \in \mathcal{O}_i \mid x \leq o_j\}|$$

und

$$\alpha_{i,j}^\wedge = |\{x \in \mathcal{O}_j \mid x \geq o_i\}|.$$

- (v) Wir definieren  $(\ell \times \ell)$ -Matrizen  $\mathcal{P}(A)^\vee = (\alpha_{i,j}^\vee)$  und  $\mathcal{P}(A)^\wedge = (\alpha_{i,j}^\wedge)$ , die wir Plesken-Matrizen nennen wollen. Die Bahnen seien topologisch sortiert. Dann sind  $\mathcal{P}(A)^\vee$  und  $\mathcal{P}(A)^\wedge$  obere Dreiecksmatrizen, deren Diagonalelemente alle Eins sind. Darüberhinaus gilt

$$\begin{aligned} \alpha_{1,j}^\vee &= 1, & \alpha_{1,j}^\wedge &= |\mathcal{O}_j|, \\ \alpha_{i,\ell}^\vee &= |\mathcal{O}_i|, & \alpha_{i,\ell}^\wedge &= 1 \end{aligned}$$

für alle  $1 \leq i, j \leq \ell$ .

- (vi) Für alle  $1 \leq i, j \leq \ell$  gilt

$$\alpha_{i,j}^\vee \cdot |\mathcal{O}_j| = |\mathcal{O}_i| \cdot \alpha_{i,j}^\wedge.$$

In Matrixform hat man

$$\mathcal{P}(A)^\vee \cdot \mathcal{D} = \mathcal{D} \cdot \mathcal{P}(A)^\wedge,$$

mit der Diagonalmatrix  $\mathcal{D} = \text{diag}(|\mathcal{O}_1|, \dots, |\mathcal{O}_\ell|)$ . Insbesondere gilt

$$\mathcal{P}(A)^\wedge = \mathcal{D}^{-1} \cdot \mathcal{P}(A)^\vee \cdot \mathcal{D}.$$

*Beweis:*

- (i) Seien  $z$  und  $z^a = w$  zwei verschiedene Elemente derselben  $A$ -Bahn auf  $\mathcal{L}$  für ein  $a \in A$ . Angenommen, es gilt  $z \leq w$  (Im Fall  $w \leq z$  hat man  $z^{a^{-1}} \geq z$ , d. h. wir können die Elemente  $z$  und  $w := z^{a^{-1}}$  betrachten und sind im ersten Fall). Da  $\mathcal{L}$  endlich ist, ist  $A/\ker(A)$  eine Untergruppe der endlichen Gruppe  $\text{Sym}_{\mathcal{L}}$  und deswegen ebenfalls endlich. Also gibt es eine Zahl  $s$  mit  $a^s \in \ker(A)$ . Dann folgt

$$z \leq z^a \Rightarrow z^a \leq z^{a^2} \Rightarrow \dots \Rightarrow z^{a^{s-1}} \leq z^{a^s} = z,$$

also  $z = z^a = z^{a^2} = \dots$  im Widerspruch zur Annahme.

- (ii) Es gilt

$$\begin{aligned} 0_{\mathcal{L}}^a &= \left( \bigwedge_{x \in \mathcal{L}} x \right)^a = \bigwedge_{x \in \mathcal{L}} x^a = \bigwedge_{x \in \mathcal{L}} x = 0_{\mathcal{L}}, \\ 1_{\mathcal{L}}^a &= \left( \bigvee_{x \in \mathcal{L}} x \right)^a = \bigvee_{x \in \mathcal{L}} x^a = \bigvee_{x \in \mathcal{L}} x = 1_{\mathcal{L}} \end{aligned}$$

für alle  $a \in A$  und somit  $0_{\mathcal{L}}^A = 0_{\mathcal{L}}$  und  $1_{\mathcal{L}}^A = 1_{\mathcal{L}}$ .

- (iii) Wegen  $x \leq x$  für alle  $x \in \mathcal{O}_i$  und alle  $i \leq \ell$  gilt (PO1). Angenommen, es gilt  $\mathcal{O}_i < \mathcal{O}_j$  und  $\mathcal{O}_j < \mathcal{O}_i$  für  $1 \leq i, j \leq \ell$ . Dann existieren  $x, x' \in \mathcal{O}_i$  und  $y, y' \in \mathcal{O}_j$  mit  $x \leq y$  und  $y' \leq x'$ . Da  $A$  auf  $\mathcal{O}_j$  transitiv ist, gibt es ein  $a \in A$  mit  $y'^a = y$ . Also

$$x \leq y = y'^a \leq x'^a \in \mathcal{O}_i,$$

und demnach  $x \leq x'^a$ , was nach (i) nur für  $x = x'^a$  möglich ist. Damit folgt  $y = x$  und  $i = j$ , also (PO2).

Um (PO3) nachzuweisen, seien  $1 \leq i, j, k \leq \ell$  mit  $\mathcal{O}_i < \mathcal{O}_j < \mathcal{O}_k$ . Demnach existieren  $x \in \mathcal{O}_i$ ,  $y, y' \in \mathcal{O}_j$  und  $z \in \mathcal{O}_k$  mit  $x \leq y$  und  $y' \leq z$ . Sei  $a \in A$  mit  $y'^a = y$ . Dann gilt

$$x \leq y = y'^a \leq z^a$$

und demnach  $x \leq z^a$ , was  $\mathcal{O}_i < \mathcal{O}_k$  impliziert.

Der Nachweis, dass die Elemente des Posets wie angegeben nummeriert werden können, erfolgt mit Hilfe eines graphentheoretischen Arguments: Die Bahnen  $\mathcal{O}_i$  des Posets definieren die Knoten  $V_i$  eines endlichen gerichteten Graphen  $\mathcal{G}$ . Eine Kante wird genau dann vom Knoten  $V_i$  zum Knoten  $V_j$  gelegt, wenn im Poset  $\mathcal{O}_i < \mathcal{O}_j$  gilt. Wir schreiben  $V_i \mapsto V_j$ , falls eine Kante von  $V_i$  nach  $V_j$  existiert. Dieser gerichtete Graph hat keine Schleifen (Kanten eines Knotens zu sich selbst) und ist azyklisch. Gäbe es einen Zyklus  $V_{i_1} \mapsto V_{i_2} \mapsto \dots \mapsto V_{i_r} = V_{i_1}$ , dann wäre für jedes  $1 < j < r$  :  $\mathcal{O}_{i_1} < \mathcal{O}_{i_j} < \mathcal{O}_{i_1}$  und nach (PO2) demnach  $\mathcal{O}_{i_j} = \mathcal{O}_{i_1}$ . Dies kann nicht sein, denn der Graph ist schleifenfrei. Ein graphentheoretisches Argument (siehe beispielsweise Manber [26, Section 7.4]) besagt, dass die Knoten jedes endlichen gerichteten azyklischen Graphen topologisch sortiert werden können, d. h. dass  $V_i \mapsto V_j$  in dieser Nummerierung die Ungleichung  $i \leq j$  impliziert. Überträgt man die derart erhaltene Anordnung der Knoten auf die Bahnen der Gruppe, so gewinnt man eine Nummerierung mit der gewünschten Eigenschaft. Man bemerkt ferner, dass in einem Verband alle Elemente oberhalb von  $0_{\mathcal{L}}$  und unterhalb von  $1_{\mathcal{L}}$  liegen. Deswegen gilt in der topologischen Nummerierung stets  $\mathcal{O}_1 = \{0_{\mathcal{L}}\}$  und  $\mathcal{O}_\ell = \{1_{\mathcal{L}}\}$ .

- (iv) Eine Gleichung  $x \vee y = z$  mit  $x \in \mathcal{O}_i$  und  $y, z \in \mathcal{O}_j$  ist nur für  $y = z$



möglich. Deswegen gilt

$$\begin{aligned}\alpha_{i,j}^{\vee} &= \alpha_{ijj}^{\vee} = |\{(x, y) \in \mathcal{O}_i \times \mathcal{O}_j \mid x \vee y = o_j\}| \\ &= |\{x \in \mathcal{O}_i \mid x \vee o_j = o_j\}| \\ &= |\{x \in \mathcal{O}_i \mid x \leq o_j\}|\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\alpha_{i,j}^{\wedge} &= \alpha_{jii}^{\wedge} = |\{(x, y) \in \mathcal{O}_j \times \mathcal{O}_i \mid x \wedge y = o_i\}| \\ &= |\{x \in \mathcal{O}_j \mid x \wedge o_i = o_i\}| \\ &= |\{x \in \mathcal{O}_j \mid x \geq o_i\}|.\end{aligned}$$

- (v) Die Bahnen  $\mathcal{O}_1, \dots, \mathcal{O}_\ell$  seien topologisch nummeriert. Wir nehmen  $\alpha_{i,j}^{\vee} \neq 0$  für  $i > j$  an. Dann existieren  $x \in \mathcal{O}_i$  und  $z \in \mathcal{O}_j$  mit  $x \leq z$ . Aufgrund der Nummerierung folgt  $i \leq j$ , im Widerspruch zur Annahme. Also ist  $\mathcal{P}(A)^\vee$  eine obere Dreiecksmatrix. Außerdem gilt nach (i)

$$\alpha_{i,i}^{\vee} = |\{x \in \mathcal{O}_i \mid x \leq o_i\}| = |\{o_i\}| = 1.$$

Die behaupteten Eigenschaften von  $\mathcal{P}(A)^\wedge$  werden analog gezeigt. Ferner hat man für  $1 \leq i, j \leq \ell$ :

$$\begin{aligned}\alpha_{1,j}^{\vee} &= |\{x \in \{0_\ell\} \mid x \leq o_j\}| = 1, \\ \alpha_{i,\ell}^{\vee} &= |\{x \in \mathcal{O}_i \mid x \leq 1_\ell\}| = |\mathcal{O}_i|, \\ \alpha_{i,j}^{\wedge} &= |\{x \in \mathcal{O}_j \mid 0_\ell \leq x\}| = |\mathcal{O}_j|, \\ \alpha_{i,\ell}^{\wedge} &= |\{x \in \{1_\ell\} \mid o_i \leq x\}| = 1.\end{aligned}$$

- (vi) Wir betrachten den bipartiten Graphen  $\mathcal{G}_{ij}$ , dessen Knoten die Elemente der Bahnen  $\mathcal{O}_i$  und  $\mathcal{O}_j$  sind. Ein Element  $x \in \mathcal{O}_i$  wird genau dann mit einem Element  $y \in \mathcal{O}_j$  verbunden, wenn im Verband  $x \leq y$  gilt. Doppelte Abzählung der Kanten des Graphen  $\mathcal{G}_{ij}$  ergibt

$$\# \text{ Kanten} = \sum_{x \in \mathcal{O}_i} |\{y \in \mathcal{O}_j \mid x \leq y\}| = \sum_{x \in \mathcal{O}_i} \alpha_{i,j}^{\wedge} = |\mathcal{O}_i| \cdot \alpha_{i,j}^{\wedge}$$

$$= \sum_{y \in \mathcal{O}_j} |\{x \in \mathcal{O}_i \mid x \leq y\}| = \sum_{y \in \mathcal{O}_j} \alpha_{i,j}^y = |\mathcal{O}_j| \cdot \alpha_{i,j}^y.$$

□

**4.1.5 Beispiel** Wir betrachten den Dodekaeder (Abbildung 4.1) und ordnen die

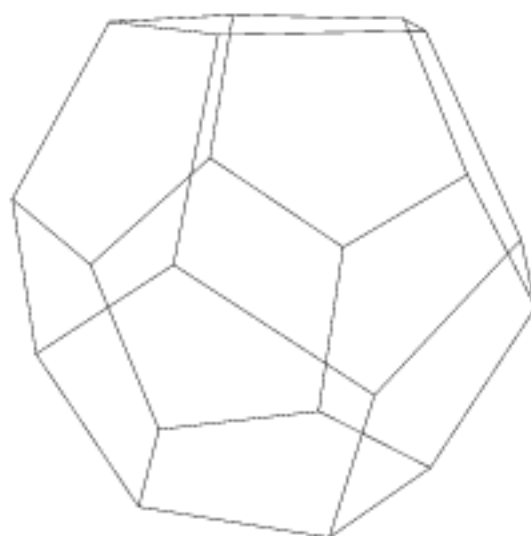


Abbildung 4.1: Der Dodekaeder

Menge der Ecken, Kanten und Seiten durch Inklusion. Hinzunahme der leeren Menge, die in allen Elementen enthalten ist, sowie des Dodekaeders selbst, der alle Elemente enthält, ergibt einen Verband, den Verband  $(\mathcal{Dode}, \subseteq)$ . Der Dodekaeder hat 20 Ecken, 30 Kanten und 12 Seiten. Die Gruppe der Bewegungen des Dodekaeder auf sich selbst operiert auf diesem Verband. Diese Gruppe, isomorph zu  $Alt_5$ , ist transitiv auf Ecken, Kanten und Seiten. Somit haben wir insgesamt fünf Bahnen,  $\mathcal{O}_{0,1}$ ,  $\mathcal{O}_{1,1}$ ,  $\mathcal{O}_{2,1}$ ,  $\mathcal{O}_{3,1}$ ,  $\mathcal{O}_{4,1}$ , die der leeren Menge, den Ecken, den Kanten, den Seiten bzw. dem Dodekaeder entsprechen. Je zwei Ecken sind in einer Kante enthalten und jede Seite hat 5 Kanten und 5 Ecken. Der Dodekaeder hat

12 Seiten, 30 Kanten und 20 Ecken, Damit erhalten wir folgende Plesken-Matrix:

$$\mathcal{P}^\vee(\mathfrak{Dode}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 5 & 20 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 30 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (4.3)$$

Nach Lemma 4.1.4 (vi) gilt mit

$$\mathcal{D} = \text{diag}(|\mathcal{O}_{0,1}|, \dots, |\mathcal{O}_{4,1}|) = \text{diag}(1, 20, 30, 12, 1),$$

$$\mathcal{P}^\wedge(\mathfrak{Dode}) = \mathcal{D}^{-1} \cdot \mathcal{P}^\vee(\mathfrak{Dode}) \cdot \mathcal{D} = \begin{pmatrix} 1 & 20 & 30 & 12 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (4.4)$$

◇

## 4.2 Der Plesken-Ring

Die Gruppe  $A$  operiere auf der endlichen Halbgruppe  $(M, \circ)$ . Es seien  $\mathcal{O}_1, \dots, \mathcal{O}_\ell$  die Bahnen von  $A$  auf  $M$  mit Vertretern  $o_i \in \mathcal{O}_i$ . Für  $1 \leq i, j, k \leq \ell$  sei  $\alpha_{ijk}^\circ$  die in (4.2) definierte Zahl. Plesken definiert folgenden Ring:

**4.2.1 Definition** Der  $(M, \circ, A)$ -Ring ist ein Ring mit  $\mathbb{Z}$ -Basis  $b_1, \dots, b_\ell$  mit

$$b_i \circ b_j = \sum_{k=1}^{\ell} \alpha_{ijk}^\circ b_k \quad \text{für } 1 \leq i, j \leq \ell.$$

Der  $(M, \circ, A)$ -Ring ist also ein Ring mit einer ausgezeichneten  $\mathbb{Z}$ -Basis. Aus der Definition heraus ergibt sich, dass der Ring bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt ist. Allerdings ist zunächst nicht klar, dass dieser Ring wirklich existiert. Dies ist das erste Resultat aus [28]:

**4.2.2 Satz** Der  $(M, \circ, A)$ -Ring existiert.

*Beweis:* Sei  $(\mathbb{Z}[M], \circ)$  der Halbgruppenring von  $(M, \circ)$  über  $\mathbb{Z}$ . Wir haben eine Einbettung  $\iota : \mathfrak{P}(M) \hookrightarrow \mathbb{Z}[M]$ ,  $X \mapsto \iota(X) := \sum_{m \in X} 1 \cdot m$ . Wir setzen die Operation von  $A$  auf  $M$  fort zu einer Operation auf  $(\mathbb{Z}[M], \circ)$  durch

$$\left( \sum_{m \in M} x_m m \right)^a := \sum_{m \in M} x_m m^a$$

für  $a \in A$ ,  $x_m \in \mathbb{Z}$ .

Sei  $(\mathbb{Z}[M]_A, \circ)$  der Unterring der  $A$ -Fixelemente in  $(\mathbb{Z}[M], \circ)$ , d. h.

$$\mathbb{Z}[M]_A = \{u \in \mathbb{Z}[M] \mid \forall a \in A : u^a = u\}.$$

Sei  $u = \sum_{m \in M} x_m m \in \mathbb{Z}[M]_A$  mit  $x_m \in \mathbb{Z}$  für alle  $m \in M$ . Dann gilt

$$\sum_{m \in M} x_m m = u = u^a = \sum_{m \in M} x_m m^a = \sum_{m \in M} x_{m^{a^{-1}}} m,$$

woraus  $x_m = x_{m^{a^{-1}}}$  für alle  $a \in A$  folgt. Demnach sind die Koeffizienten eines Elements  $u \in \mathbb{Z}[M]_A$  konstant auf den Bahnen von  $A$ . Andererseits liegen alle Bahnsummen

$$b_i := \iota(\mathcal{O}_i) = \sum_{m \in \mathcal{O}_i} m$$

in  $\mathbb{Z}[M]_A$ . Zusammengenommen ergibt sich

$$\mathbb{Z}[M]_A = \langle b_i \mid i = 1, \dots, \ell \rangle_{\mathbb{Z}}.$$

Es gilt

$$b_i \circ b_j = \left( \sum_{x \in \mathcal{O}_i} x \right) \circ \left( \sum_{y \in \mathcal{O}_j} y \right)$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{z \in M} \sum_{\substack{x \in \mathcal{O}_i, y \in \mathcal{O}_j \\ x \circ y = z}} z \\
&= \sum_{k=1}^{\ell} \sum_{z \in \mathcal{O}_k} \underbrace{|\{(x, y) \in \mathcal{O}_i \times \mathcal{O}_j \mid x \circ y = z\}|}_{\alpha_{ijk}^{\circ}} z \\
&= \sum_{k=1}^{\ell} \alpha_{ijk}^{\circ} b_k,
\end{aligned}$$

wobei wir ausnützen, dass die Zahl  $\alpha_{ijk}^{\circ}$  unabhängig von der Wahl der Repräsentanten  $z \in \mathcal{O}_k$  ist.  $\square$

Wir nennen den in 4.2.1 eingeführten Ring *Plesken-Ring*.

Betrachten wir den Fall, dass  $M = \mathcal{L}$  ein Verband ist. Dann gibt es auf  $\mathcal{L}$  zwei Halbgruppen, nämlich  $(\mathcal{L}, \vee)$  und  $(\mathcal{L}, \wedge)$ . Plesken zeigt, dass die  $(\mathcal{L}, \vee, A)$ - und  $(\mathcal{L}, \wedge, A)$ -Ringe in diesem Fall isomorph zu einem freien  $\mathbb{Z}$ -Modul mit  $\ell$  Erzeugern ist, auf dem eine zusätzliche Verknüpfung eingeführt wird, die der Multiplikation im Plesken-Ring entspricht. Die Multiplikation ist das Hadamard-Produkt von Vektoren, das heißt die komponentenweise Multiplikation der Vektoreinträge. Wir bezeichnen das Hadamard-Produkt mit dem Symbol  $\odot$ .

**4.2.3 Satz (Plesken [28])** *Die Gruppe  $A$  operiere auf dem endlichen Verband  $(\mathcal{L}, \vee, \wedge)$ . Seien  $\mathcal{O}_1, \dots, \mathcal{O}_{\ell}$  die Bahnen von  $A$  auf  $\mathcal{L}$ . Seien  $\alpha_i \in \mathcal{O}_i$  Vertreter der Bahnen für  $1 \leq i \leq \ell$ . Wir nehmen an, dass die Bahnen wie in Lemma 4.1.4 topologisch nummeriert sind. Seien  $\alpha_{ijk}^{\vee}$  und  $\alpha_{ijk}^{\wedge}$  die Strukturkonstanten der  $(\mathcal{L}, \vee, A)$ - und  $(\mathcal{L}, \wedge, A)$ -Ringe  $R^{\vee}$  und  $R^{\wedge}$  mit zugehörigen  $\mathbb{Z}$ -Basen  $(b_1^{\vee}, \dots, b_{\ell}^{\vee})$  und  $(b_1^{\wedge}, \dots, b_{\ell}^{\wedge})$ . Dann gilt:*

(i) *Der  $(\mathcal{L}, \vee, A)$ -Ring  $R^{\vee}$  ist isomorph zu  $(\mathbb{Z}^{\ell}, \odot, +)$ . Die Abbildung*

$$\varphi^{\vee} : \begin{cases} R^{\vee} & \rightarrow (\mathbb{Z}^{\ell}, \odot, +) \\ b_i^{\vee} & \mapsto \mathbf{b}_i^{\vee} := (\alpha_{i,1}^{\vee}, \dots, \alpha_{i,\ell}^{\vee}) \end{cases}$$

mit  $\alpha_{i,j}^\vee = |\{x \in \mathcal{O}_i \mid x \leq o_j\}| = \alpha_{ijj}^\vee$  für  $1 \leq i, j \leq \ell$  ist ein Isomorphismus von Ringen.  $\varphi^\vee$  ist als  $\mathbb{Z}$ -lineare Fortsetzung der angegebenen Abbildung zu verstehen. Ferner gilt

$$\mathbf{b}_i^\vee \odot \mathbf{b}_j^\vee = \sum_{k=1}^{\ell} \alpha_{ijk}^\vee \mathbf{b}_k^\vee.$$

(ii) Der  $(\mathcal{L}, \wedge, A)$ -Ring  $R^\wedge$  ist isomorph zu  $(\mathbb{Z}^\ell, \odot, +)$ . Die Abbildung

$$\varphi^\wedge : \begin{cases} R^\wedge & \rightarrow (\mathbb{Z}^\ell, \odot, +) \\ \mathbf{b}_j^\wedge & \mapsto \mathbf{b}_j^\wedge := \begin{pmatrix} \alpha_{1,j}^\wedge \\ \vdots \\ \alpha_{\ell,j}^\wedge \end{pmatrix} \end{cases}$$

mit  $\alpha_{i,j}^\wedge = |\{y \in \mathcal{O}_j \mid y \geq o_i\}| = \alpha_{jii}^\wedge$  für  $1 \leq i, j \leq \ell$  ist ein Isomorphismus von Ringen.  $\varphi^\wedge$  ist als  $\mathbb{Z}$ -lineare Fortsetzung der angegebenen Abbildung zu verstehen. Ferner gilt

$$\mathbf{b}_i^\wedge \odot \mathbf{b}_j^\wedge = \sum_{k=1}^{\ell} \alpha_{ijk}^\wedge \mathbf{b}_k^\wedge.$$

*Beweis:* Wir zeigen nur den ersten Teil des Satzes, die zweite Aussage wird analog dazu bewiesen. Zunächst verifizieren wir, dass  $\varphi^\vee$  ein Homomorphismus von Ringen ist. Definitionsgemäß ist die Abbildung ein Homomorphismus der additiven Gruppen. Wir berechnen die  $l$ -te Komponente von  $\mathbf{b}_i^\vee \odot \mathbf{b}_j^\vee$  in  $\mathbb{Z}^\ell$ :

$$\begin{aligned} \alpha_{i,l}^\vee \cdot \alpha_{j,l}^\vee &= |\{x \in \mathcal{O}_i \mid x \leq o_l\}| \cdot |\{y \in \mathcal{O}_j \mid y \leq o_l\}| \\ &= |\{(x, y) \in \mathcal{O}_i \times \mathcal{O}_j \mid (x \vee y) \leq o_l\}| \\ &= \sum_{\substack{w \in \mathcal{L} \\ w \leq o_l}} |\{(x, y) \in \mathcal{O}_i \times \mathcal{O}_j \mid x \vee y = w\}| \\ &= \sum_{k=1}^{\ell} \sum_{\substack{w \in \mathcal{O}_k \\ w \leq o_l}} \underbrace{|\{(x, y) \in \mathcal{O}_i \times \mathcal{O}_j \mid x \vee y = w\}|}_{=\alpha_{ijk}^\vee} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=1}^{\ell} \alpha_{ijk}^{\vee} \cdot \sum_{\substack{a \in \mathcal{O}_k \\ u \leq \sigma_l}} 1 \\
&= \sum_{k=1}^{\ell} \alpha_{ijk}^{\vee} \cdot a_{k,l}^{\vee}.
\end{aligned}$$

Damit ergibt sich

$$\begin{aligned}
\varphi^{\vee}(b_i^{\vee}) \odot \varphi^{\vee}(b_j^{\vee}) &= \mathbf{b}_i^{\vee} \odot \mathbf{b}_j^{\vee} \\
&= (\dots, \alpha_{i,l}^{\vee}, \dots) \odot (\dots, \alpha_{j,l}^{\vee}, \dots) \\
&= (\dots, \alpha_{i,l}^{\vee} \cdot \alpha_{j,l}^{\vee}, \dots) \\
&= (\dots, \sum_{k=1}^{\ell} \alpha_{ijk}^{\vee} \cdot a_{k,l}^{\vee}, \dots) \\
&= \sum_{k=1}^{\ell} \alpha_{ijk}^{\vee} \cdot (\dots, a_{k,l}^{\vee}, \dots) \\
&= \sum_{k=1}^{\ell} \alpha_{ijk}^{\vee} \cdot \mathbf{b}_k^{\vee} \\
&= \sum_{k=1}^{\ell} \alpha_{ijk}^{\vee} \cdot \varphi^{\vee}(b_k^{\vee}) \\
&= \varphi^{\vee}\left(\sum_{k=1}^{\ell} \alpha_{ijk}^{\vee} \cdot b_k^{\vee}\right) \\
&= \varphi^{\vee}(b_i^{\vee} \vee b_j^{\vee}).
\end{aligned}$$

Es ist

$$\mathcal{P}(A)^{\vee} = \begin{pmatrix} \mathbf{b}_1^{\vee} \\ \vdots \\ \mathbf{b}_{\ell}^{\vee} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{1,1}^{\vee} & \dots & \alpha_{1,\ell}^{\vee} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{\ell,1}^{\vee} & \dots & \alpha_{\ell,\ell}^{\vee} \end{pmatrix} \quad (4.5)$$

und

$$\mathcal{P}(A)^\wedge = \left( \mathbf{b}_1^\wedge \mid \cdots \mid \mathbf{b}_\ell^\wedge \right) = \begin{pmatrix} \alpha_{1,1}^\wedge & \cdots & \alpha_{1,\ell}^\wedge \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{\ell,1}^\wedge & \cdots & \alpha_{\ell,\ell}^\wedge \end{pmatrix}. \quad (4.6)$$

Die Matrix  $\mathcal{P}(A)^\vee$  ist nach Lemma 4.1.4 (v) eine obere Dreiecksmatrix mit Einsen auf der Diagonalen. Demnach ist  $\mathcal{P}(A)^\vee$  invertierbar, und zwar sogar über  $\mathbb{Z}$ . Der angegebene Homomorphismus  $\varphi^\vee$  ist somit surjektiv und injektiv, die Ringe  $R^\vee$  und  $\mathbb{Z}^\ell$  also isomorph.  $\square$

**4.2.4 Beispiel** Wir betrachten wieder den Verband  $(\mathcal{Dode}, \subseteq)$  (vgl. Beispiel 4.1.5) unter der Operation der Symmetriegruppe des Dodekaeders. Die Plesken-Ringe  $(\mathcal{Dode}, \vee, \text{Alt}_5)$  und  $(\mathcal{Dode}, \wedge, \text{Alt}_5)$  haben fünf Basiselemente  $b_0^\vee, \dots, b_4^\vee$  und  $b_0^\wedge, \dots, b_4^\wedge$ . Unter den Abbildungen  $\varphi^\vee$  und  $\varphi^\wedge$  von Satz 4.2.3 entsprechen diese den fünf Zeilen der Matrix  $\mathcal{P}^\vee(\mathcal{Dode})$  aus (4.3) bzw. den fünf Spalten der Matrix  $\mathcal{P}^\wedge(\mathcal{Dode})$  aus (4.4). Im Plesken-Ring berechnen wir das Produkt  $b_2^\wedge \wedge b_3^\wedge$ . Gemäß Satz 4.2.3 ergibt sich

$$\mathbf{b}_2^\wedge \odot \mathbf{b}_3^\wedge = \begin{pmatrix} 30 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} 12 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 360 \\ 9 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 240 \cdot \mathbf{b}_0^\wedge + 3 \cdot \mathbf{b}_1^\wedge + 2 \cdot \mathbf{b}_2^\wedge,$$

was beispielsweise zeigt, dass sich jeder Eckpunkt des Dodekaeders auf drei Weisen als Schnitt einer Seitenfläche und einer Kante darstellen läßt.  $\diamond$



### 4.3 Gruppenoperationen auf Verbänden mit Rangfunktion

Sei  $(\mathcal{L}, \vee, \wedge)$  ein Verband. Eine *Rangfunktion* von  $\mathcal{L}$  ist eine Abbildung  $\text{rk} : \mathcal{L} \rightarrow \mathbb{N}$ ,  $x \mapsto \text{rk}(x)$  mit

$$x < y \Rightarrow \text{rk}(x) < \text{rk}(y) \quad (4.7)$$

für alle  $x, y \in \mathcal{L}$ . Hierin ist  $\leq$  die in (4.1) eingeführte Ordnung auf  $\mathcal{L}$ . Wir schreiben  $(\mathcal{L}, \vee, \wedge, \text{rk})$  für einen Verband  $\mathcal{L}$  mit Rangfunktion  $\text{rk}$ . Aus der Bedingung (4.7) folgt für vollständige Verbände

$$\min_{x \in \mathcal{L}} \text{rk}(x) = \text{rk}(0_{\mathcal{L}}) \quad \text{und} \quad \max_{x \in \mathcal{L}} \text{rk}(x) = \text{rk}(1_{\mathcal{L}}).$$

Im Fall einer Gruppenoperation einer Gruppe  $A$  auf einem vollständigen Verband  $\mathcal{L}$  mit Rangfunktion  $\text{rk}$  verlangen wir zusätzlich

$$\text{rk}(x^a) = \text{rk}(x)$$

für alle  $x \in \mathcal{L}$  und alle  $a \in A$ . Hier sind einige Beispiele für Gruppenoperationen auf Verbänden mit Rangfunktionen:

#### 4.3.1 Beispiele

- (i) Sei  $G$  eine endliche Gruppe,  $\mathcal{L}(G)$  der *Untergruppenverband* von  $G$ . Die Ordnung ist durch die Inklusionsrelation der Untergruppen gegeben. Das Supremum zweier Gruppen  $U$  und  $V$  ist die Gruppe, die von allen Elementen von  $U$  und  $V$  erzeugt wird, d. h.  $U \vee V = \langle U, V \rangle$ . Das Infimum der Elemente  $U$  und  $V$  ist der Schnitt beider Gruppen, d. h.  $U \wedge V = U \cap V$ . Eine Rangfunktion kann wie folgt erklärt werden: Für  $U \leq G$  setzen wir  $\text{rk}(U) := \sum_{i=1}^r n_i$ , falls  $|U| = \prod_{i=1}^r p_i^{n_i}$  gilt. Jede Gruppe  $A \leq \text{Aut}(G)$  operiert auf diesem Verband. Insbesondere operiert die Gruppe  $G$  auf sich

selbst durch Konjugation. Ein Element  $g \in G$  bildet  $U \in \mathcal{L}(G)$  auf  $U^g$  ab. Wegen  $|U^g| = |U| = \prod_{i=1}^r p_i^{n_i}$  folgt  $\text{rk}(U^g) = \text{rk}(U) = \sum_{i=1}^r n_i$ . Eine weitere mögliche Rangfunktion auf  $\mathcal{L}(G)$  ist  $\text{rk}(U) := |U|$ .

- (ii) Sei  $\mathcal{V}$  eine endliche Menge. Wir betrachten den Verband der Teilmengen  $(\mathfrak{P}(\mathcal{V}), \cup, \cap)$ . Die Ordnung ist die gewöhnliche Inklusion von Mengen, das Supremum ist die Vereinigungsmenge, das Infimum ist die Schnittmenge. Eine Rangfunktion ist  $\text{rk} : \mathfrak{P}(\mathcal{V}) \rightarrow \mathbb{N}$ ,  $X \mapsto |X|$ . Jede Gruppe  $A \leq \text{Sym}_{\mathcal{V}}$  operiert auf diesem Verband durch

$$A \times \mathfrak{P}(\mathcal{V}) \rightarrow \mathfrak{P}(\mathcal{V}) : (a, X) \mapsto X^a$$

und es gilt  $\text{rk}(X^a) = |X^a| = |X| = \text{rk}(X)$ .

◇

Eine Rangfunktion induziert *Schichten* auf dem Verband. Die  $i$ -te Schicht besteht aus den Elementen vom Rang  $i$ :

$$L^{(i)}(\mathcal{L}) := \{x \in \mathcal{L} \mid \text{rk}(x) = i\}.$$

Für den Rest dieses Abschnittes sei  $\mathcal{L}$  ein *endlicher* (und damit vollständiger) Verband mit Rangfunktion. Ferner sei  $A$  eine Gruppe, die auf diesem Verband operiert.

Wir benötigen eine erweiterte Terminologie für die Bahnen von  $A$  auf  $\mathcal{L}$ . Sei  $0 = \text{rk}(0_{\mathcal{L}})$  und  $r = \text{rk}(1_{\mathcal{L}})$ . Für  $0 \leq i \leq r$  seien  $\mathcal{O}_{i,1}, \dots, \mathcal{O}_{i,\ell_i}$  die Bahnen von  $A$  auf  $L^{(i)}(\mathcal{L})$ . Für  $1 \leq j \leq \ell_i$  seien  $o_{i,j} \in \mathcal{O}_{i,j}$  Vertreter dieser Bahnen. Dann setzen wir für  $1 \leq i, j, k \leq \ell$  und  $u \leq \ell_i, v \leq \ell_j$  und  $w \leq \ell_k$

$$\alpha_{u,v,w}^{(i,j,k)\vee} := |\{(x, y) \in \mathcal{O}_{i,u} \times \mathcal{O}_{j,v} \mid x \vee y = o_{k,w}\}|, \quad (4.8)$$

$$\alpha_{u,v,w}^{(i,j,k)\wedge} := |\{(x, y) \in \mathcal{O}_{i,u} \times \mathcal{O}_{j,v} \mid x \wedge y = o_{k,w}\}|, \quad (4.9)$$

und

$$\alpha_{u,v}^{(i,j)\vee} := \alpha_{u,v,v}^{(i,j,j)\vee} = |\{x \in \mathcal{O}_{i,u} \mid x \leq \sigma_{j,v}\}|, \quad (4.10)$$

$$\alpha_{u,v}^{(i,j)\wedge} := \alpha_{v,u,u}^{(j,i,i)\wedge} = |\{x \in \mathcal{O}_{j,v} \mid x \geq \sigma_{i,u}\}|. \quad (4.11)$$

Für  $1 \leq m, n \leq r$  entstehen  $\ell_m \times \ell_n$  Matrizen

$$\mathcal{P}_{m,n}(A)^\vee := (\alpha_{i,j}^{(m,n)\vee})_{i,j},$$

$$\mathcal{P}_{m,n}(A)^\wedge := (\alpha_{i,j}^{(m,n)\wedge})_{i,j}.$$

Durch Zusammenfügen dieser Matrizen entstehen Blockmatrizen

$$\mathcal{P}(A)^\vee := (\mathcal{P}_{m,n}(A)^\vee)_{m,n},$$

$$\mathcal{P}(A)^\wedge := (\mathcal{P}_{m,n}(A)^\wedge)_{m,n}.$$

Bis auf eine eventuelle Umordnung von Zeilen und Spalten handelt es sich hierbei genau um die Matrizen, die in Lemma 4.1.4 definiert wurden. Einige Eigenschaften dieser Matrizen sind wie folgt:

**4.3.2 Lemma** Die Gruppe  $A$  operiere auf dem endlichen Verband  $(\mathcal{L}, \vee, \wedge, \text{rk})$ .

Sei  $0 = \text{rk}(0_{\mathcal{L}})$  und  $r = \text{rk}(1_{\mathcal{L}})$ .

(i) Die  $L^{(i)}(\mathcal{L})$  sind Antiketten für  $i \leq r$ .

(ii)  $\ell_0 = \ell_r = 1$  und  $\mathcal{O}_{0,1} = \{\sigma_{0,1}\}$  mit  $\sigma_{0,1} = 0_{\mathcal{L}}$  und  $\mathcal{O}_{r,1} = \{\sigma_{r,1}\}$  mit  $\sigma_{r,1} = 1_{\mathcal{L}}$ .

(iii) Sei  $\mathfrak{b}_{i,j}^\vee$  die  $j$ -te Zeile der  $i$ -ten Zeile der Blockmatrizen  $\mathcal{P}_{i,\cdot}(A)^\vee$ . Sei  $\mathfrak{b}_{i,j}^\wedge$

die  $j$ -te Spalte der  $i$ -ten Spalte der Blockmatrizen  $\mathcal{P}_{\cdot,i}(A)^\vee$ . Dann gilt

$$\mathcal{P}(A)^\vee = \begin{pmatrix} \mathbf{b}_{0,1}^\vee \\ \vdots \\ \mathbf{b}_{i,1}^\vee \\ \vdots \\ \mathbf{b}_{i,\ell_i}^\vee \\ \vdots \\ \mathbf{b}_{r,\ell_r}^\vee \end{pmatrix}$$

und

$$\mathcal{P}(A)^\wedge = \left( \mathbf{b}_{0,1}^\wedge \cdots \left| \mathbf{b}_{i,1}^\wedge \cdots \mathbf{b}_{i,\ell_i}^\wedge \right| \cdots \mathbf{b}_{r,\ell_r}^\wedge \right).$$

Für  $0 \leq i, j \leq r$ ,  $u \leq \ell_i$  und  $v \leq \ell_j$  gilt

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_{i,u}^\vee \odot \mathbf{b}_{j,v}^\vee &= \sum_{k=0}^r \sum_{w=1}^{\ell_k} \alpha_{u,v,w}^{(i,j,k)\vee} \mathbf{b}_{k,w}^\vee, \\ \mathbf{b}_{i,u}^\wedge \odot \mathbf{b}_{j,v}^\wedge &= \sum_{k=0}^r \sum_{w=1}^{\ell_k} \alpha_{u,v,w}^{(i,j,k)\wedge} \mathbf{b}_{k,w}^\wedge. \end{aligned}$$

(iv) Für  $0 \leq n, m \leq r$  gilt

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{0,n}(A)^\vee &= \mathbf{1}_{1 \times \ell_n}, & \mathcal{P}_{0,n}(A)^\wedge &= (|\mathcal{O}_{n,1}|, \dots, |\mathcal{O}_{n,\ell_n}|), \\ \mathcal{P}_{m,r}(A)^\vee &= (|\mathcal{O}_{m,1}|, \dots, |\mathcal{O}_{m,\ell_m}|)^\top, & \mathcal{P}_{m,r}(A)^\wedge &= \mathbf{1}_{\ell_m \times 1}. \end{aligned}$$

(v) Sei  $0 \leq n < m \leq r$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{m,n}(A)^\vee &= \mathcal{P}_{m,n}(A)^\wedge = \mathbf{0}_{\ell_m \times \ell_n}, \\ \mathcal{P}_{m,m}(A)^\vee &= \mathcal{P}_{m,m}(A)^\wedge = I_{\ell_m}. \end{aligned}$$

(vi) Sei  $\mathcal{D}_i = \text{diag}(|\mathcal{O}_{i,1}|, \dots, |\mathcal{O}_{i,\ell_i}|)$  für  $0 \leq i \leq r$ . Dann gilt

$$\mathcal{P}_{m,n}(A)^\wedge = \mathcal{D}_m^{-1} \cdot \mathcal{P}_{m,n}(A)^\vee \cdot \mathcal{D}_n$$

für  $0 \leq m, n \leq r$ . Äquivalent dazu hat man

$$\mathcal{P}(A)^\wedge = \mathcal{D}^{-1} \cdot \mathcal{P}(A)^\vee \cdot \mathcal{D}$$

mit  $\mathcal{D} := \text{diag}(\mathcal{D}_1, \dots, \mathcal{D}_r)$ .

*Beweis:*

- (i) Seien  $x, y \in L^{(i)}(\mathcal{L})$ . Dann gilt  $x < y \Rightarrow \text{rk}(x) < \text{rk}(y)$  im Widerspruch zu  $\text{rk}(x) = \text{rk}(y) = i$ .
- (ii) Gemäß den Eigenschaften einer Rangfunktion gilt  $L^{(0)} = \{0_{\mathcal{L}}\}$  und  $L^{(r)} = \{1_{\mathcal{L}}\}$ . Nach Lemma 4.1.4 (ii) sind dies einelementige Bahnen, also  $\mathcal{O}_{0,1} = \{0_{\mathcal{L}}\}$  und  $\mathcal{O}_{r,1} = \{1_{\mathcal{L}}\}$ .
- (iii) Umschreiben der Ergebnisse von Satz 4.2.3 ergibt die beiden angegebenen Gleichungen.
- (iv) Sei  $j \leq \ell_n$  und  $i \leq \ell_m$ . Dann gilt

$$\alpha_{1,j}^{(0,n)\vee} = |\{x \in \{0_{\mathcal{L}}\} \mid x \leq o_{n,j}\}| = 1$$

$$\Rightarrow \mathcal{P}_{0,n}(A)^\vee = \mathbb{1}_{1 \times \ell_n},$$

$$\alpha_{i,1}^{(m,r)\vee} = |\{x \in \mathcal{O}_{m,i} \mid x \leq 1_{\mathcal{L}}\}| = |\mathcal{O}_{m,i}|$$

$$\Rightarrow \mathcal{P}_{m,r}(A)^\vee = (|\mathcal{O}_{m,1}|, \dots, |\mathcal{O}_{m,\ell_m}|)^\top,$$

$$\alpha_{1,j}^{(0,n)\wedge} = |\{x \in \mathcal{O}_{n,j} \mid x \geq 0_{\mathcal{L}}\}| = |\mathcal{O}_{n,j}|$$

$$\Rightarrow \mathcal{P}_{0,n}(A)^\wedge = (|\mathcal{O}_{n,1}|, \dots, |\mathcal{O}_{n,\ell_n}|),$$

$$\alpha_{i,1}^{(m,r)\wedge} = |\{x \in \{1_{\mathcal{L}}\} \mid x \geq o_{m,i}\}| = 1$$

$$\Rightarrow \mathcal{P}_{m,r}(A)^\wedge = \mathbb{1}_{\ell_m \times 1}.$$

- (v) Für  $n < m$  liegt kein Element von  $L^{(m)}$  unterhalb eines Elementes aus  $L^{(n)}$ .  
Deshalb gilt

$$\mathcal{P}_{m,n}(A)^\vee = \mathcal{P}_{m,n}(A)^\wedge = \underline{0}_{\mathcal{L}_w \times \mathcal{L}_n}.$$

Die Gleichung

$$\mathcal{P}_{m,m}(A)^\vee = \mathcal{P}_{m,m}(A)^\wedge = I_{\mathcal{L}_w}$$

folgt mit (i) und mit

$$\alpha_{i,i}^{(m,m)\vee} = \alpha_{i,i}^{(m,m)\wedge} = 1.$$

- (vi) Anwendung von Lemma 4.1.4 (vi) auf die  $\alpha_{i,j}^{(m,n)\vee}$  und die  $\alpha_{i,j}^{(m,n)\wedge}$  ergibt

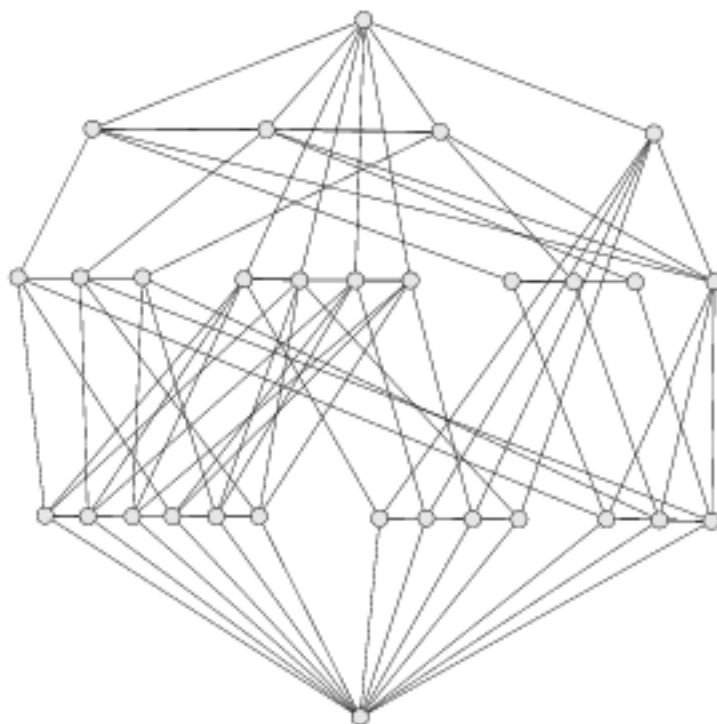
$$\alpha_{i,j}^{(m,n)\vee} \cdot |\mathcal{O}_{n,j}| = |\mathcal{O}_{m,i}| \cdot \alpha_{i,j}^{(m,n)\wedge}.$$

In Matrixschreibweise bedeutet dies

$$\mathcal{P}_{m,n}(A)^\vee \cdot \mathcal{D}_n = \mathcal{D}_m \cdot \mathcal{P}_{m,n}(A)^\wedge.$$

□

**4.3.3 Beispiel** Wir betrachten  $\mathfrak{L}(\text{Sym}_4)$ , den Untergruppenverband von  $\text{Sym}_4$  (vgl. Abbildung 4.2, unten eine Tabelle der Konjugationsklassen von Untergruppen). Abbildung 4.3 zeigt das  $\vee$ -Bild des Verbandes und die Plesken-Matrix  $\mathcal{P}^\vee(\text{Sym}_4)$ . Darunter findet sich das  $\wedge$ -Bild und die Plesken-Matrix  $\mathcal{P}^\wedge(\text{Sym}_4)$ . In beiden Matrizen ist die Blockzerlegung, die sich durch die Rangfunktion ergibt, durch vertikale und horizontale Striche angedeutet. ◇



Bahn $\mathcal{O}_{i,j}$	Vertreter $\mathcal{O}_{i,j}$	Typ	$ \mathcal{O}_{i,j} $	$ \mathcal{O}_{i,j} $	rk $\mathcal{O}_{i,j}$
$\mathcal{O}_{0,1}$	$\langle id \rangle$		1	1	0
$\mathcal{O}_{1,1}$	$\langle (1, 2) \rangle$	$\simeq \mathbb{Z}_2$	6	2	1
$\mathcal{O}_{1,2}$	$\langle (1, 2, 3) \rangle$	$\simeq \mathbb{Z}_3$	4	3	1
$\mathcal{O}_{1,3}$	$\langle (1, 2)(3, 4) \rangle$	$\simeq \mathbb{Z}_2$	3	2	1
$\mathcal{O}_{2,1}$	$\langle (1, 2), (3, 4) \rangle$	$\simeq \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$	3	4	2
$\mathcal{O}_{2,2}$	$\langle (1, 2, 3), (1, 2) \rangle$	$\simeq \text{Sym}_3$	4	6	2
$\mathcal{O}_{2,3}$	$\langle (1, 2, 3, 4) \rangle$	$\simeq \mathbb{Z}_4$	3	4	2
$\mathcal{O}_{2,4}$	$\langle (1, 2)(3, 4), (1, 3)(2, 4) \rangle$	$\simeq V_4$	1	4	2
$\mathcal{O}_{3,1}$	$\langle (1, 2, 3, 4), (1, 3) \rangle$	$\simeq D_4$	3	8	3
$\mathcal{O}_{3,2}$	$\langle (1, 2)(3, 4)(1, 2, 3) \rangle$	$\simeq \text{Alt}_4$	1	12	3
$\mathcal{O}_{4,1}$	$\langle (1, 2, 3, 4), (1, 2) \rangle$	$\simeq \text{Sym}_4$	1	24	4

Abbildung 4.2: Der Untergruppenverband von  $\text{Sym}_4$

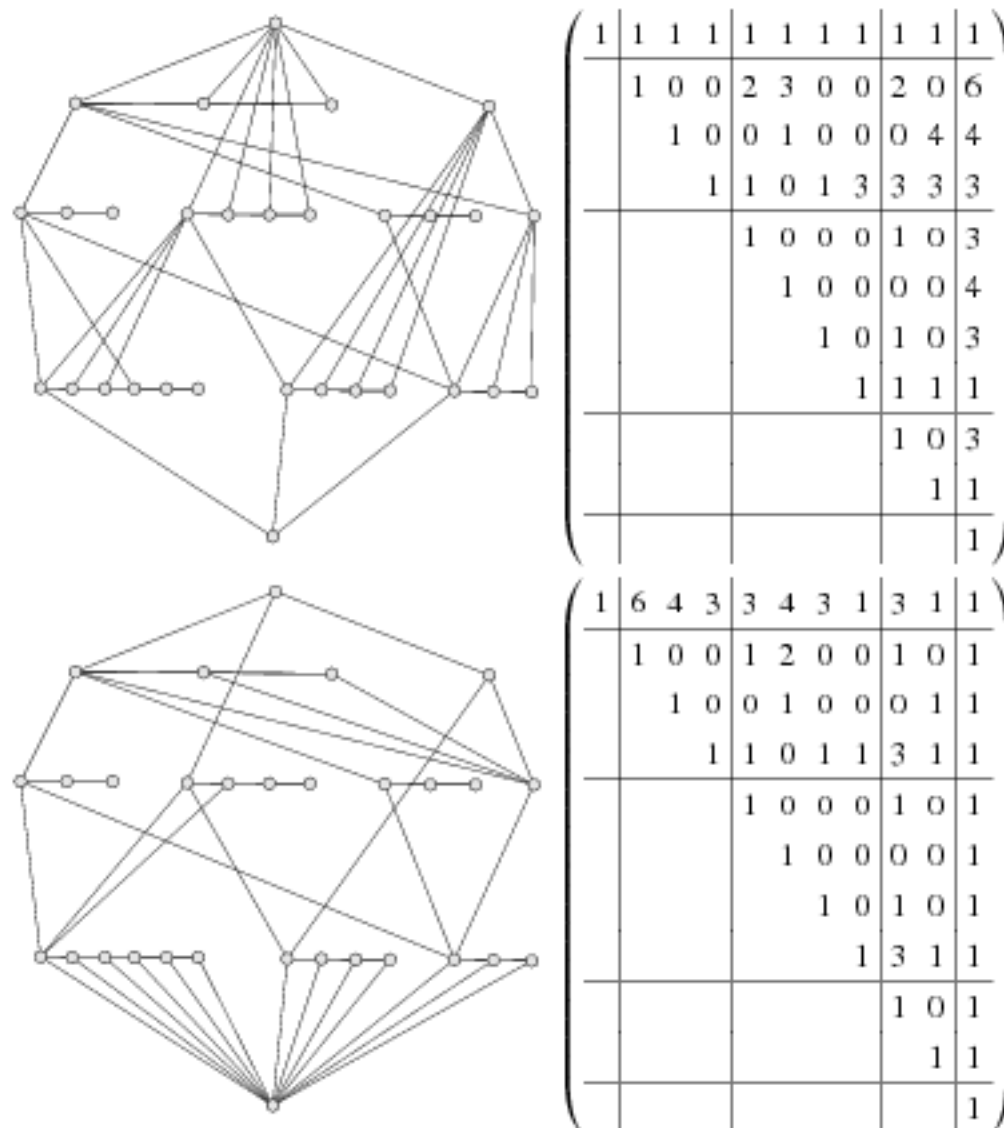


Abbildung 4.3: Der Untergruppenverband von  $\text{Sym}_4$ ,  $\vee$ -Bild, Plesken-Matrix  $\mathcal{P}^v(\text{Sym}_4)$  (oben),  $\wedge$ -Bild, Plesken-Matrix  $\mathcal{P}^w(\text{Sym}_4)$  (unten)



## 4.4 Gruppenoperationen auf dem Verband der Teilmengen

In diesem Abschnitt beschäftigen wir uns mit der Operation einer Gruppe auf dem Teilmengenverband. In dieser Situation erhalten wir weitergehende Resultate. Dies ist in der Natur des Teilmengenverbandes begründet, doch wollen wir hier nicht tiefer in die Verbandstheorie einsteigen.

**4.4.1 Lemma** *Sei  $\mathcal{V}$  eine  $v$ -elementige Menge und sei  $A$  eine Permutationsgruppe auf  $\mathcal{V}$ . Wir betrachten die induzierte Operation von  $A$  auf dem Verband  $(\mathfrak{P}(\mathcal{V}), \cup, \cap, | \cdot |)$  mit der Rangfunktion  $\mathfrak{P}(\mathcal{V}) \rightarrow \{0, \dots, v\}$ ,  $X \mapsto |X|$ . Sei  $L^{(i)}(\mathfrak{P}(\mathcal{V})) = \binom{\mathcal{V}}{i}$  die  $i$ -te Schicht des Verbandes. Seien  $\mathcal{O}_{i,1}, \dots, \mathcal{O}_{i,\ell_i}$  für  $0 \leq i \leq v$  die Bahnen von  $A$  auf  $L^{(i)}(\mathfrak{P}(\mathcal{V}))$  mit Vertretern  $O_{i,j} \in \mathcal{O}_{i,j}$ .*

(i) *Für  $0 \leq m \leq n \leq v$  gilt:*

$$\begin{aligned} \mathbb{1}_{1 \times \ell_m} \cdot \mathcal{P}_{m,n}(A)^\cup &= \binom{n}{m} \cdot \mathbb{1}_{1 \times \ell_n}, \\ \mathcal{P}_{m,n}(A)^\cap \cdot \mathbb{1}_{\ell_n \times 1} &= \binom{v-m}{n-m} \cdot \mathbb{1}_{\ell_m \times 1}. \end{aligned}$$

(ii) *Für alle  $0 \leq m \leq h \leq n \leq v$  gelten folgende Rekursionsformeln:*

$$\begin{aligned} \binom{n-m}{h-m} \cdot \mathcal{P}_{m,n}(A)^\cup &= \mathcal{P}_{m,h}(A)^\cup \cdot \mathcal{P}_{h,n}(A)^\cup, \\ \binom{n-m}{h-m} \cdot \mathcal{P}_{m,n}(A)^\cap &= \mathcal{P}_{m,h}(A)^\cap \cdot \mathcal{P}_{h,n}(A)^\cap. \end{aligned}$$

(iii) *Die inversen Matrizen sind*

$$\begin{aligned} (\mathcal{P}(A)^\cup)^{-1} &= ((-1)^{m+n} \mathcal{P}_{m,n}(A)^\cup)_{m,n}, \\ (\mathcal{P}(A)^\cap)^{-1} &= ((-1)^{m+n} \mathcal{P}_{m,n}(A)^\cap)_{m,n}. \end{aligned}$$

(iv) Ist  $A = \text{Sym}_{\mathcal{V}}$ , so gilt  $\ell_0 = \ell_1 = \dots = \ell_v = 1$ , d. h.  $\text{Sym}_{\mathcal{V}}$  ist transitiv auf  $i$ -Teilmengen für alle  $i \leq v$ . Es gilt  $\mathcal{P}_{m,n}(\text{Sym}_{\mathcal{V}})^{\cup} = \binom{n}{m}$  und damit

$$\mathcal{P}(\text{Sym}_{\mathcal{V}})^{\cup} = (\mathcal{P}_{m,n}(\text{Sym}_{\mathcal{V}})^{\cup}) = \mathfrak{B}_{[0,\dots,v],[0,\dots,v]}$$

sowie  $\mathcal{P}_{m,n}(\text{Sym}_{\mathcal{V}})^{\cap} = \binom{v-m}{n-m}$  und

$$\mathcal{P}(\text{Sym}_{\mathcal{V}})^{\cap} = (\mathcal{P}_{m,n}(\text{Sym}_{\mathcal{V}})^{\cap}).$$

*Beweis:*

(i) Wir zeigen, dass die Summe der Elemente einer jeden Spalte von  $\mathcal{P}_{m,n}(A)^{\cup}$  gleich  $\binom{n}{m}$  ist: Für  $j \leq \ell_n$  ergibt sich

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{\ell_m} \alpha_{i,j}^{(m,n)^{\cup}} &= \sum_{i=1}^{\ell_m} |\{X \in \mathcal{O}_{m,i} \mid X \subseteq \mathcal{O}_{n,j}\}| \\ &= |\{X \in \underbrace{\bigcup_{i=1}^{\ell_m} \mathcal{O}_{m,i}}_{=L^{(m)}(\mathfrak{P}(\mathcal{V})) = \binom{v}{m}} \mid X \subseteq \mathcal{O}_{n,j}\}| \\ &= \binom{n}{m}. \end{aligned}$$

Wir zeigen weiter, dass die Summe der Elemente einer jeden Zeile von  $\mathcal{P}_{m,n}(A)^{\cap}$  gleich  $\binom{v-m}{n-m}$  ist: Für alle  $i \leq \ell_m$  haben wir

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{\ell_n} \alpha_{i,j}^{(m,n)^{\cap}} &= \sum_{j=1}^{\ell_n} |\{Y \in \mathcal{O}_{n,j} \mid \mathcal{O}_{m,i} \subseteq Y\}| \\ &= |\{Y \in \underbrace{\bigcup_{j=1}^{\ell_n} \mathcal{O}_{n,j}}_{=L^{(v)}(\mathfrak{P}(\mathcal{V})) = \binom{v}{n}} \mid \mathcal{O}_{m,i} \subseteq Y\}| \\ &= \binom{v-m}{n-m}. \end{aligned}$$

(ii) (Nach Schmalz [30, Satz 2.3.5, Seite 40]) Wir weisen zunächst die zweite angegebene Rekursionsformel für die Matrizen  $\mathcal{P}_{m,n}(A)^\wedge$  nach. Auf beiden Seiten der Gleichung stehen Matrizen, die in ihren Zeilen und Spalten in derselben Reihenfolge durch die  $m$ - und  $n$ -Bahnen von  $A$  indiziert sind. Sei  $x_{i,k}$  der  $(i, k)$ -te Eintrag der linken Matrix, sowie  $x'_{i,k}$  der  $(i, k)$ -te Eintrag der rechten Matrix. Definitionsgemäß ist  $x_{i,k} = \binom{n-m}{h-m} \alpha_{i,k}^{(m,n)^\wedge}$ . Der entsprechende Matrixeintrag der rechten Seite berechnet sich zu

$$\begin{aligned}
x'_{i,k} &= \sum_{j=1}^{\ell_h} \alpha_{i,j}^{(m,h)^\wedge} \cdot \alpha_{j,k}^{(h,n)^\wedge} \\
(4.11) \quad &= \sum_{j=1}^{\ell_h} \alpha_{j,i,i}^{(h,m,m)^\wedge} \cdot \alpha_{k,j,j}^{(n,h,h)^\wedge} \\
&= \sum_{j=1}^{\ell_h} |\{H \in \mathcal{O}_{h,j} \mid \mathcal{O}_{m,i} \subseteq H\}| \cdot |\{N \in \mathcal{O}_{n,k} \mid \mathcal{O}_{h,j} \subseteq N\}| \\
&= \sum_{j=1}^{\ell_h} \left| \left\{ (H, N) \in \mathcal{O}_{h,j} \times \mathcal{O}_{n,k} \mid \mathcal{O}_{m,i} \subseteq H \subseteq N \right\} \right| \\
&= \left| \left\{ (H, N) \in \underbrace{\bigcup_{j=1}^{\ell_h} \mathcal{O}_{h,j}}_{=L^{(h)}(\mathfrak{P}(\mathcal{V})) = \binom{\mathcal{V}}{h}} \times \mathcal{O}_{n,k} \mid \mathcal{O}_{m,i} \subseteq H \subseteq N \right\} \right| \\
&= \sum_{\substack{N \in \mathcal{O}_{n,k} \\ \mathcal{O}_{m,i} \subseteq N}} |\{H \in \binom{\mathcal{V}}{h} \mid \mathcal{O}_{m,i} \subseteq H \subseteq N\}| \\
&= \sum_{\substack{N \in \mathcal{O}_{n,k} \\ \mathcal{O}_{m,i} \subseteq N}} \binom{n-m}{h-m} \\
&= \binom{n-m}{h-m} \cdot \alpha_{i,k}^{(m,n)^\wedge} \\
&= x_{i,k}.
\end{aligned}$$

Mit Lemma 4.3.2 (vi) ergibt sich daraus die erste Rekursionsformel:

$$\begin{aligned} \binom{n-m}{h-m} \mathcal{P}_{m,n}(A)^\cup &= \mathcal{D}_m \cdot \binom{n-m}{h-m} \cdot \mathcal{P}_{m,n}(A)^\cap \cdot \mathcal{D}_n^{-1} \\ &= \mathcal{D}_m \cdot \mathcal{P}_{m,h}(A)^\cap \cdot \mathcal{D}_h^{-1} \cdot \mathcal{D}_h \cdot \mathcal{P}_{h,n}(A)^\cap \cdot \mathcal{D}_n^{-1} \\ &= \mathcal{P}_{m,h}(A)^\cup \cdot \mathcal{P}_{h,n}(A)^\cup. \end{aligned}$$

(iii) Wir zeigen durch Induktion nach der Differenz  $n - m$ , dass die inverse Matrix  $(\mathcal{P}(A)^\cup)^{-1}$  die Form  $((-1)^{m+n} \cdot \mathcal{P}(A)_{m,n}^\cup)$  hat. Nach Lemma 4.3.2 (iii) ist  $\mathcal{P}(A)^\cup = (\mathcal{P}(A)_{m,n}^\cup)$  eine obere Dreiecksmatrix. Demnach ist  $\mathcal{P}(A)_{m,n}^\cup = \underline{0}$  für  $n < m$ . Die Diagonalmatrizen sind Einheitsmatrizen:  $\mathcal{P}(A)_{m,m}^\cup = I_{\ell_m}$ . Wir bezeichnen die Blöcke der inversen Matrix mit  $(\mathcal{P}(A)^\cup)^{-1} = (\mathcal{P}'_{m,n})$ . Dann ist  $\mathcal{P}'_{m,n} = \underline{0}$  für  $n < m$  und  $\mathcal{P}'_{m,m} = I_{\ell_m}$ , d. h. die Formel gilt für  $n = m$  bzw.  $n - m = 0$ . Wir bestimmen nun  $\mathcal{P}'_{m,n}$  für  $n - m > 0$ . Wegen  $(\mathcal{P}(A)^\cup) \cdot (\mathcal{P}(A)^\cup)^{-1} = I$  ergibt sich in der  $m$ -ten Zeile und der  $n$ -ten Spalte der Blockmatrizen

$$\begin{aligned} &\sum_{h=0}^v \mathcal{P}_{m,h}(A)^\cup \cdot \mathcal{P}'_{h,n} = \underline{0}_{\ell_m \times \ell_n} \\ \Leftrightarrow &\sum_{h=m}^n \mathcal{P}_{m,h}(A)^\cup \cdot \mathcal{P}'_{h,n} = \underline{0}_{\ell_m \times \ell_n} \\ \Leftrightarrow &I_{\ell_m} \cdot \mathcal{P}'_{m,n} + \sum_{h=m+1}^n \mathcal{P}_{m,h}(A)^\cup \cdot \mathcal{P}'_{h,n} = \underline{0}_{\ell_m \times \ell_n} \\ \Leftrightarrow &\mathcal{P}'_{m,n} = - \sum_{h=m+1}^n \mathcal{P}_{m,h}(A)^\cup \cdot \mathcal{P}'_{h,n} \end{aligned}$$

und mit Induktion

$$\begin{aligned} \mathcal{P}'_{m,n} &= - \sum_{h=m+1}^n \mathcal{P}_{m,h}(A)^\cup \cdot \mathcal{P}'_{h,n} \\ &= - \sum_{h=m+1}^n (-1)^{h+n} \cdot \mathcal{P}_{m,h}(A)^\cup \cdot \mathcal{P}_{h,n}(A)^\cup \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (-1)^{n+1} \sum_{h=m+1}^n (-1)^h \cdot \binom{n-m}{h-m} \cdot \mathcal{P}_{m,n}(A)^\cup \\
&= (-1)^{n+1} \left( \sum_{h=1}^{n-m} (-1)^{m+h} \cdot \binom{n-m}{h} \right) \cdot \mathcal{P}_{m,n}(A)^\cup \\
&= (-1)^{n+m+1} \left( \underbrace{\left[ \sum_{h=0}^{n-m} (-1)^h \cdot \binom{n-m}{h} \right]}_{=0} - 1 \right) \cdot \mathcal{P}_{m,n}(A)^\cup \\
&= (-1)^{n+m} \cdot \mathcal{P}_{m,n}(A)^\cup.
\end{aligned}$$

Der Beweis für  $(\mathcal{P}(A)^\cap)^{-1}$  verlauft analog.

- (iv) Die Gruppe  $A := \text{Sym}_{\mathcal{V}}$  ist transitiv auf  $i$ -Teilmengen von  $\mathcal{V}$ . In jeder Schicht gibt es also genau eine Bahn  $\mathcal{O}_{m,1}$  mit einer Vertretermenge  $O_{m,1}$ . Dann gilt

$$\alpha_{1,1}^{(m,n)^\cup} = \left| \left\{ X \in \mathcal{O}_{m,1} = \binom{\mathcal{V}}{m} \mid X \subseteq O_{n,1} \right\} \right| = \binom{n}{m},$$

und

$$\alpha_{1,1}^{(m,n)^\cap} = \left| \left\{ Y \in \mathcal{O}_{n,1} = \binom{\mathcal{V}}{n} \mid O_{m,1} \subseteq Y \right\} \right| = \binom{v-m}{n-m}.$$

□

Es ist zu bemerken, dass die soeben bewiesenen Aussagen (iii) und (iv) zusammen gleichzeitig einen weiteren Beweis von Lemma 1.3.20, also der Aussage

$$\mathfrak{B}^{-1} = (b'_{i,j}) \quad \text{mit} \quad b'_{i,j} = (-1)^{i+j} \binom{j}{i}$$

liefern.

Der Zusammenhang zu der in Abschnitt 3.1 betrachteten Konstruktion von Designs mit vorgeschriebener Automorphismengruppe ist in folgendem Lemma angegeben. Das Resultat ergibt sich direkt aus der Definition der Matrizen.

**4.4.2 Lemma** *Die Gruppe  $A$  operiere auf der Menge  $\mathcal{V} = \{1, \dots, v\}$ . Seien  $0 \leq t \leq k \leq v$  ganze Zahlen. Dann gilt*

$$\mathcal{M}_{t,k}^A = \mathcal{P}_{t,k}(A)^\cap,$$

*wenn beide Matrizen in den Zeilen und Spalten in derselben Reihenfolge durch die  $t$ - und  $k$ -Bahnen von  $A$  indiziert werden.*

# Kapitel 5

## Klassifikation von Designs mittels Schnittzahlen

In diesem Kapitel soll ein Verfahren vorgestellt werden, die Schnittzahlen von Designs mit vorgeschriebener Automorphismengruppe schnell zu berechnen. Das Verfahren benützt die Kenntnis der Bahnen der vorgeschriebenen Gruppe  $A$  auf den Teilmengen. Hintergrund der hier beschriebenen Methode ist der Plesken-Ring der Operation der Gruppe  $A$  auf dem Teilmengenverband.

Abschnitt 5.1 (Satz 5.1,2) stellt das Verfahren zur Berechnung der globalen Schnittzahlen von Designs vor. Im Abschnitt 5.2 werden dann als Anwendung die  $8$ - $(31, 10, \lambda)$  Designs aus Abschnitt 3.2 mit dieser Methode vollständig klassifiziert.

### 5.1 Die Berechnung von Schnittzahlen

Wir betrachten die Schnitttypen  $\alpha^{(s)}(\mathcal{D})$  und  $\alpha^{[s]}(\mathcal{D})$  für ganzzahliges  $s \geq 1$ . Wir setzen

$$\mathcal{A}^{(s)} := \left( \alpha^{(1)}(\mathcal{D})^\top \mid \dots \mid \alpha^{(s)}(\mathcal{D})^\top \right)$$

und

$$\mathcal{A}^{[v]} := \left( \alpha^{[1]}(\mathcal{D})^\top \mid \dots \mid \alpha^{[v]}(\mathcal{D})^\top \right)$$

und nennen diese Matrizen die *Matrizen der globalen Schnittzahlen*.

Sei  $\mathcal{V} = \{1, \dots, v\}$  die Punktmenge und  $A \leq \text{Sym}_{\mathcal{V}}$  die vorgeschriebene Automorphismengruppe. Wir nehmen an, dass wir die Bahnen der Gruppe  $A$  auf den  $i$ -Teilmengen mit  $i \leq k$  kennen. Seien  $\mathcal{O}_{i,1}, \dots, \mathcal{O}_{i,\ell_i}$  die  $i$ -Bahnen von  $A$  für  $0 \leq i \leq k$ . Seien  $\mathcal{O}_{i,j} \in \mathcal{O}_{i,j}$  Vertretermengen dieser Bahnen. Für  $0 \leq m, n \leq k$  haben wir die Plesken-Matrizen  $\mathcal{P}_{m,n}(A)^\cap$ , welche zusammengenommen eine große  $((k+1) \times (k+1))$ -Blockmatrix  $\mathcal{P}(A)^\cap = (\mathcal{P}_{m,n}(A)^\cap)$  bilden. Wir bezeichnen die Spalten dieser Matrix mit  $\mathfrak{b}_{i,j}^\cap$ . Der Plesken-Ring  $(\mathcal{P}(A)^\cap, \odot, +)$  wird von den Spalten dieser Matrix über  $\mathbb{Z}$  erzeugt.

Wir benötigen die im Beweis von Satz 2.3.1 betrachtete Gewichtsfunktion  $\kappa : \mathbb{Z}[\mathfrak{P}(\mathcal{V})] \rightarrow \mathcal{W}_v$ , wobei  $\mathcal{W}_v$  der freie  $\mathbb{Z}$ -Modul vom Rang  $(v+1)$  ist, erzeugt von den Einheitsvektoren  $\mathfrak{e}_0, \dots, \mathfrak{e}_v$ . Einschränkung auf den  $A$ -Fixunterring  $\mathbb{Z}[\mathfrak{P}(\mathcal{V})]_A$  liefert eine Abbildung

$$\kappa : (\mathbb{Z}[\mathfrak{P}(\mathcal{V})]_A, \cap, +) \rightarrow \mathcal{W}_v, \sum_{M \subseteq \mathcal{V}} a_M \cdot M \mapsto \sum_{M \subseteq \mathcal{V}} a_M \cdot \mathfrak{e}_{|M|}, \quad (5.1)$$

wobei alle  $a_M$  ganzzahlig sind und  $\sum_{M \subseteq \mathcal{V}} a_M \cdot M$  fix unter  $A$  ist, also die Koeffizienten  $a_M$  konstant auf Bahnen von  $A$  sind.

Wir definieren eine weitere Gewichtsfunktion  $\nu$  vom Plesken-Ring  $(\mathcal{P}(A)^\cap, \odot, +)$  nach  $\mathcal{W}_v$ . Diese Abbildung  $\nu$  sei die distributive  $\mathbb{Z}$ -lineare Fortsetzung von

$$\nu : (\mathcal{P}(A)^\cap, \odot, +) \rightarrow \mathcal{W}_v, \mathfrak{b}_{i,j}^\cap \mapsto |\mathcal{O}_{i,j}| \cdot \mathfrak{e}_i. \quad (5.2)$$

Der Zusammenhang zwischen  $\kappa$  und  $\nu$  ist folgender:

**5.1.1 Lemma** *Die Gruppe  $A$  operiere auf der Menge  $\mathcal{V}$ . Seien  $\mathcal{O}_{i,1}, \dots, \mathcal{O}_{i,\ell_i}$  die  $A$ -Bahnen auf  $i$ -Teilmengen. Sei  $\iota(\mathcal{O}_{i,j}) = \sum_{X \in \mathcal{O}_{i,j}} X$  die Summe aller Elemente*



der Bahn  $\mathcal{O}_{i,j}$ , aufgefaßt als Element des Halbgruppenrings  $(\mathbb{Z}[\mathfrak{P}(\mathcal{V})]_A, \cap, +)$ . Sei  $\kappa : (\mathbb{Z}[\mathfrak{P}(\mathcal{V})]_A, \cap, +) \rightarrow \mathcal{W}_v$  die in (5.1) definierte Abbildung und  $(\mathcal{P}(A)^\cap, \odot, +)$  der Plesken-Ring mit der in (5.2) definierten Gewichtsfunktion  $v : (\mathcal{P}(A)^\cap, \odot, +) \rightarrow \mathcal{W}_v$ . Dann gilt

$$\kappa = v \circ \varphi^\cap,$$

wobei  $\varphi^\cap$  die in Satz 4.2.3 definierte Abbildung ist, die die  $j$ -te Bahnsumme

$$\iota(\mathcal{O}_{i,j}) \text{ auf das Basiselement } \mathfrak{b}_{i,j}^\cap := \begin{pmatrix} \mathfrak{b}_0^\cap \\ \vdots \\ \mathfrak{b}_v^\cap \end{pmatrix} \text{ mit } \mathfrak{b}_h^\cap = (\alpha_{1,j}^{(h,i)^\cap}, \dots, \alpha_{\ell_b,j}^{(h,i)^\cap})^\top$$

für  $h = 0, \dots, v$  abbildet.

*Beweis:* Wir weisen die behauptete Beziehung für die Erzeuger des Rings  $(\mathbb{Z}[\mathfrak{P}(\mathcal{V})]_A, \cap, +)$  nach, d. h. für die Bahnsummen  $\iota(\mathcal{O}_{i,j})$ :

$$\begin{aligned} \kappa(\iota(\mathcal{O}_{i,j})) &= \kappa\left(\sum_{B \in \mathcal{O}_{i,j}} B\right) = \sum_{B \in \mathcal{O}_{i,j}} \epsilon_{|B|} = |\mathcal{O}_{i,j}| \cdot \epsilon_i = v(\mathfrak{b}_{i,j}^\cap) \\ &= (v \circ \varphi^\cap)(\iota(\mathcal{O}_{i,j})). \end{aligned}$$

□

Hier nun das Hauptresultat zur Berechnung globaler Schnitzzahlen von Designs:

**5.1.2 Satz** Sei  $\mathcal{D} = (\mathcal{V}, \mathcal{B})$  ein  $t$ - $(v, k, \lambda)$  Design mit  $A \leq \text{Aut}(\mathcal{D})$ . Sei  $\mathfrak{x}$  der Lösungsvektor des Designs, d. h.  $\mathcal{B} = \mathcal{B}_{\mathfrak{x}} = \bigcup_{\substack{j=1 \\ \mathfrak{x}(j)=1}}^{\ell_k} \mathcal{O}_{k,j}$ . Sei  $\mathfrak{z} = \sum_{\substack{j=1 \\ \mathfrak{x}(j)=1}}^{\ell_k} \mathfrak{b}_{k,j}^\cap$ . Der Vektor  $\mathfrak{z}$  wird in folgender Weise aufgespalten:

$$\mathfrak{z} = \begin{pmatrix} \mathfrak{z}_0 \\ \mathfrak{z}_1 \\ \vdots \\ \mathfrak{z}_k \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \mathfrak{z}_i = \begin{pmatrix} z_{i,1} \\ z_{i,2} \\ \vdots \\ z_{i,\ell_i} \end{pmatrix}.$$

Sei  $\mathfrak{B}_{[0..k],[0..k]}^{-1}$  die  $((k+1) \times (k+1))$ -Matrix, deren  $(i, j)$ -ter Koeffizient die Zahl  $(-1)^{i+j} \binom{j}{i}$  ist (diese Matrix ist nach Lemma 1.3.20 invers zu der Matrix der Binomialkoeffizienten). Sei  $\mathfrak{S}_1$  die  $(s \times s)$ -Matrix der Stirling Zahlen erster Art  $\mathfrak{S}_1 = (\mathfrak{S}_1(i, j))$  und sei  $\mathcal{D} = \text{diag}(\frac{1}{1!}, \frac{1}{2!}, \dots, \frac{1}{s!})$ . Dann gilt

$$\mathcal{A}^{[s]} = \mathfrak{B}_{[0..k],[0..k]}^{-1} \cdot \mathcal{Z}_s(A, \mathfrak{F}), \quad (5.3)$$

$$\mathcal{A}^{(s)} = \mathcal{A}^{[s]} \cdot \mathfrak{S}_1^T \cdot \mathcal{D}, \quad (5.4)$$

$$\mathcal{A}^{(s)} = \mathfrak{B}_{[0..k],[0..k]}^{-1} \cdot \mathcal{Z}_s(A, \mathfrak{F}) \cdot \mathfrak{S}_1^T \cdot \mathcal{D}. \quad (5.5)$$

mit einer  $((k+1) \times s)$ -Matrix

$$\mathcal{Z}_s(A, \mathfrak{F}) := \begin{pmatrix} \binom{v}{0} \lambda_0^1 & \cdots & \binom{v}{0} \lambda_0^s \\ \vdots & & \vdots \\ \binom{v}{t} \lambda_t^1 & \cdots & \binom{v}{t} \lambda_t^s \\ \hline \mathcal{P}_{0,t+1}(A)^\cap \cdot \odot^1 \mathfrak{z}_{t+1} & \cdots & \mathcal{P}_{0,t+1}(A)^\cap \cdot \odot^s \mathfrak{z}_{t+1} \\ \vdots & & \vdots \\ \mathcal{P}_{0,k-1}(A)^\cap \cdot \odot^1 \mathfrak{z}_{k-1} & \cdots & \mathcal{P}_{0,k-1}(A)^\cap \cdot \odot^s \mathfrak{z}_{k-1} \\ \hline b & \cdots & b \end{pmatrix}. \quad (5.6)$$

*Beweis:* Sei  $\mathcal{O}_{i,j}$  die  $j$ -te Bahn von  $A$  auf  $i$ -Teilmengen, für  $1 \leq j \leq \ell_i$ . Sei  $\mathcal{P}(A)^\cap = (\mathcal{P}_{m,n}(A)^\cap)$  die Plesken-Matrix der Operation von  $A$  auf den Schichten  $0, \dots, k$  des Teilmengenverbandes  $(\mathfrak{B}(\mathcal{V}), \cap)$ . Sei  $\mathfrak{b}_{i,j}^\cap$  für  $0 \leq i \leq k$  und  $1 \leq j \leq \ell_i$  die Spalte der Plesken-Matrix, die zu der  $j$ -ten Bahn von  $A$  auf  $i$ -Teilmengen gehört. Definitionsgemäß ist für  $i \leq k$

$$\mathfrak{z}_i = \mathcal{P}_{i,k}(A)^\cap \cdot \mathfrak{F}^T. \quad (5.7)$$

Im Plesken-Ring zerlegen wir

$$\odot^s \mathfrak{z} = \sum_{i=0}^k \sum_{j=1}^{\ell_i} y_{i,j}^{[s]} \cdot \mathfrak{b}_{i,j}^\cap \quad (5.8)$$

mit unbekanntem Koeffizienten  $y_{i,j}^{[s]} \in \mathbb{Z}$  (diese Koeffizienten sind sogar nichtnegativ, da sie eine Menge von Bahnen beschreiben). Wir erhalten einen Vektor

$$\eta^{[s]} = \begin{pmatrix} \eta_0^{[s]} \\ \eta_1^{[s]} \\ \vdots \\ \eta_k^{[s]} \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \eta_i^{[s]} = \begin{pmatrix} y_{i,1}^{[s]} \\ y_{i,2}^{[s]} \\ \vdots \\ y_{i,\ell_i}^{[s]} \end{pmatrix} \quad \text{für} \quad 0 \leq i \leq k. \quad (5.9)$$

Dann gilt

$$\odot^s \mathfrak{z} = \mathcal{P}(A)^\cap \cdot \eta^{[s]} \iff \eta^{[s]} = \mathcal{P}(A)^{\cap^{-1}} \cdot \odot^s \mathfrak{z}.$$

Nach Lemma 4,3,2 (v) und Lemma 4,4,1 (iii) ist die Matrix

$$\mathcal{P}(A)^{\cap^{-1}} = \left( (-1)^{i+j} \mathcal{P}_{i,j}(A)^\cap \right)$$

eine obere Dreiecksmatrix. Deshalb ergibt sich

$$\eta_i^{[s]} = \sum_{j=i}^k (-1)^{i+j} \mathcal{P}_{i,j}(A)^\cap \cdot \odot^s \mathfrak{z}_j \quad (5.10)$$

für  $i = 0, 1, \dots, k$ . Wir berechnen nun

$$\begin{aligned} \alpha^{[s]}(\mathcal{D}) &= \kappa \left( \sum_{(B_1, \dots, B_s) \in \mathfrak{B}^s} \bigcap_{k=1}^s B_{j_k} \right) \\ &= \kappa \left( \bigcap_{j=1}^s \sum_{j=1}^b B_j \right) \\ &= \kappa \left( \bigcap_{\substack{j=1 \\ \mathfrak{I}(j)=1}}^s \sum_{B \in \mathcal{O}_{k,j}} B \right) \\ &= \kappa \left( \bigcap_{\substack{j=1 \\ \mathfrak{I}(j)=1}}^s \sum_{\ell_k} \iota(\mathcal{O}_{k,j}) \right) \end{aligned}$$

wegen  $\kappa = \nu \circ \varphi^\cap$  ergibt sich nach Lemma 5.1.1

$$\stackrel{5.1.1}{=} \nu \left( \left( \bigcap_{\substack{j=1 \\ \mathfrak{x}(j)=1}}^s \sum_{k=1}^{\ell_k} \iota(\mathcal{O}_{k,j}) \right)^{\varphi^\cap} \right),$$

dessen innerster Term ein Element des  $A$ -Fixunterrings  $\mathbb{Z}[\mathfrak{B}(\mathcal{V})]_A$  ist, welcher nach dem Satz von Plesken 4.2.3 (ii), angewendet auf den  $\wedge$ -Ring, d. h. den  $\cap$ -Ring, durch den Ringisomorphismus  $\varphi^\cap$  abgebildet wird auf den Ausdruck

$$\begin{aligned} & \stackrel{4.2.3 \text{ (ii)}}{=} \nu \left( \bigodot_{\substack{j=1 \\ \mathfrak{x}(j)=1}}^s \sum_{k=1}^{\ell_k} \mathfrak{b}_{k,j}^\cap \right) \\ &= \nu \left( \bigodot^s \mathfrak{z} \right) \\ & \stackrel{(5.8)}{=} \nu \left( \sum_{i=0}^k \sum_{j=1}^{\ell_j} y_{i,j}^{[s]} \cdot \mathfrak{b}_{i,j}^\cap \right) \\ &= \sum_{i=0}^k \sum_{j=1}^{\ell_j} y_{i,j}^{[s]} \cdot \nu(\mathfrak{b}_{i,j}^\cap) \\ & \stackrel{(5.2)}{=} \sum_{i=0}^k \left\{ \sum_{j=1}^{\ell_j} |\mathcal{O}_{i,j}| \cdot y_{i,j}^{[s]} \right\} \cdot \mathbf{e}_i. \end{aligned}$$

Nach Lemma 4.3.2 (iv) ist  $\mathcal{P}_{0,i}(A)^\cap = (\mathcal{O}_{i,1}, \dots, \mathcal{O}_{i,\ell_i})$ . Mit (5.9) kann die innere Summe als Matrixprodukt geschrieben werden:

$$\begin{aligned} & \stackrel{4.3.2 \text{ (iv)}}{=} \\ & \stackrel{(5.9)}{=} \sum_{i=0}^k \mathcal{P}_{0,i}(A)^\cap \cdot \eta_i^{[s]} \cdot \mathbf{e}_i \\ & \stackrel{(5.10)}{=} \sum_{i=0}^k \left\{ \sum_{j=i}^k (-1)^{i+j} \underbrace{\mathcal{P}_{0,i}(A)^\cap \cdot \mathcal{P}_{i,j}(A)^\cap}_{= \binom{j}{i} \mathcal{P}_{0,j}(A)^\cap} \cdot \bigodot^s \underbrace{\mathfrak{z}_j}_{= \mathcal{P}_{j,k}(A)^\cap \cdot \mathfrak{F}^\top} \right\} \cdot \mathbf{e}_i, \end{aligned}$$

und mit Lemma 4.4.1 (ii) und Gleichung (5.7) erhält man

$$4.4.1 \text{ (ii)} \quad \sum_{i=0}^k \left\{ \sum_{j=i}^k (-1)^{i+j} \binom{j}{i} \mathcal{P}_{0,j}(A)^\cap \cdot \odot^s (\mathcal{P}_{j,k}(A)^\cap \cdot \mathbf{x}^\top) \right\} \cdot \mathbf{e}_i.$$

Nach Lemma 4.4.2 ist  $\mathcal{P}_{j,k}(A)^\cap = \mathcal{M}_{j,k}^A$  die Kramer-Mesner Matrix, und da nach Korollar 3.1.4 jedes  $t$ -Design auch ein  $j$ -Design für alle  $j \leq t$  ist, ergibt sich

$$4.4.2 \quad \sum_{i=0}^k \left\{ \sum_{j=i}^t (-1)^{i+j} \binom{j}{i} \mathcal{P}_{0,j}(A)^\cap \cdot \odot^s (\lambda_j \cdot \underline{1}_{\mathcal{L}_j \times 1}) \right. \\ \left. + \sum_{j=t+1}^{k-1} (-1)^{i+j} \binom{j}{i} \mathcal{P}_{0,j}(A)^\cap \cdot \odot^s \mathfrak{z}_j \right. \\ \left. + (-1)^{i+k} \binom{k}{i} \mathcal{P}_{0,k}(A)^\cap \cdot \odot^s \mathbf{x}^\top \right\} \cdot \mathbf{e}_i,$$

wobei verwendet wurde, dass nach Lemma 4.3.2 (v)  $\mathcal{P}_{k,k}(A)^\cap = I_{\ell_k}$  die Einheitsmatrix ist. Für den  $\{0, 1\}$ -Vektor  $\mathbf{x}$  gilt  $\odot^s \mathbf{x}^\top = \mathbf{x}^\top$ , also

$$\mathbf{x} \in \{0, 1\}^{\ell_k} \quad \sum_{i=0}^k \left\{ \sum_{j=i}^t (-1)^{i+j} \binom{j}{i} \underbrace{\mathcal{P}_{0,j}(A)^\cap \cdot \underline{1}_{\mathcal{L}_j \times 1}}_{=\binom{v}{j}} \cdot \lambda_j^s \right. \\ \left. + \sum_{j=t+1}^{k-1} (-1)^{i+j} \binom{j}{i} \mathcal{P}_{0,j}(A)^\cap \cdot \odot^s \mathfrak{z}_j \right. \\ \left. + (-1)^{i+k} \binom{k}{i} \underbrace{\mathcal{P}_{0,k}(A)^\cap \cdot \mathbf{x}^\top}_{=\lambda_0 = b} \right\} \cdot \mathbf{e}_i.$$

Nach Lemma 4.4.1 (i) ist die Zeilensumme der Plesken-Matrizen bekannt, es gilt  $\mathcal{P}_{0,j}(A)^\cap \cdot \mathbf{1}_{\ell_j \times 1} = \binom{v}{j}$  eine Zahl, denn es gibt nur eine Bahn in der Schicht Null ( $\ell_0 = 1$ ). Ferner hat man  $\mathcal{P}_{0,k}(A)^\cap \cdot \mathfrak{r}^\top = \lambda_0 = b$  nach Korollar 3.1.4. Somit folgt

$$\begin{aligned} & 4.4.1(i), \\ & \stackrel{3.1.4}{=} \sum_{i=0}^k \left\{ \sum_{j=i}^t (-1)^{i+j} \binom{j}{i} \binom{v}{j} \cdot \lambda_j \right. \\ & \quad \left. + \sum_{j=t+1}^{k-1} (-1)^{t+j} \binom{j}{i} \mathcal{P}_{0,j}(A)^\cap \cdot \odot^s \mathfrak{z}_j + (-1)^{t+k} \binom{k}{i} \cdot b \right\} \cdot \mathbf{e}_i. \end{aligned}$$

Schreibt man diese Gleichung in Matrixform, so erhält man

$$\mathcal{A}^{[s]} = \mathcal{B}_{[0..k],[0..k]}^{-1} \cdot \mathcal{Z}_s(A, \mathfrak{r}),$$

wobei  $\mathcal{Z}_s(A, \mathfrak{r})$  die in (5.6) definierte Matrix ist. Dies beweist (5.3). Mit Satz 2.3.1 folgt (5.4) und beide Gleichungen zusammen implizieren (5.5). Damit ist alles bewiesen.  $\square$

Wir wollen die eben entwickelte Theorie an einem Beispiel erproben:

**5.1.3 Beispiel** Das unter  $M_{24}$  invariante 5-(24, 8, 1) Witt-Design aus Beispiel 3.1.3 soll untersucht werden. Die Bahnen auf  $i$ -Teilmengen für  $i \leq 8$  indizieren die Zeilen und Spalten der in Tabelle 5.1 gezeigten Plesken-Matrix  $\mathcal{P}(M_{24})^\cap$ . Die Parameter  $\lambda_{i,j}$  für  $i+j \leq t=5$  lauten:

$\lambda_{i,j}$	$j = 0,$	$1,$	$2,$	$3,$	$4,$	$5$
$i = 0$	759	506	330	210	130	78
1	253	176	120	80	52	
2	77	56	40	28		
3	21	16	12			
4	5	4				
5	1					

	$\{\}$	1	24	276	$\{1, 2\}$ <sub>887040, 276</sub>	$\{1, 2, 3\}$ <sub>120960, 2024</sub>	$\{1, 2, 3, 4\}$ <sub>29040, 10626</sub>	$\{1, 2, 3, 4, 5\}$ <sub>5760, 42504</sub>	$\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ <sub>2160, 11344</sub>	$\{1, 2, 3, 4, 5, 8\}$ <sub>11520, 21252</sub>	$\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ <sub>720, 340032</sub>	$\{1, 2, 3, 4, 5, 8, 11\}$ <sub>40320, 6072</sub>	$\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ <sub>384, 637560</sub>	$\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 17\}$ <sub>2520, 97152</sub>	$\{1, 2, 3, 4, 5, 8, 11, 13\}$ <sub>322560, 759</sub>
	$\{1\}$	0	1	23	253	1771	8855	42504	113344	21252	340032	6072	637560	97152	759
	$\{1, 2\}$	0	0	1	22	231	1540	210	6160	1155	25872	462	64680	9856	77
	$\{1, 2, 3\}$	0	0	0	1	21	210	210	1120	210	5880	105	17640	2688	21
	$\{1, 2, 3, 4\}$	0	0	0	0	1	20	20	160	30	1120	20	4200	640	5
	$\{1, 2, 3, 4, 5\}$	0	0	0	0	0	1	1	16	3	168	3	840	128	1
	$\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$	0	0	0	0	0	0	0	1	0	18	0	135	18	0
	$\{1, 2, 3, 4, 5, 8\}$	0	0	0	0	0	0	0	0	1	16	2	120	32	1
	$\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	15	2	0
	$\{1, 2, 3, 4, 5, 8, 11\}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	16	1
	$\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
	$\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 17\}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
	$\{1, 2, 3, 4, 5, 8, 11, 13\}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1

Tabelle 5.1: Die Plesken-Matrix  $\mathcal{P}(M_{24})^{\Gamma}$

Es sei daran erinnert, dass  $\lambda_i = \lambda_{i,0}$  gesetzt wurde. Die Werte  $\binom{v}{i} = \binom{24}{i}$  für  $i = 0, 1, \dots, 5$  sind:

$$(1, 24, 276, 2024, 10626, 42504).$$

Wir wählen  $s = 3$  und erhalten

$$\begin{aligned} \mathcal{A}^{(3)} &= \mathcal{B}_{[0..s],[0..s]}^{-1} \cdot \mathcal{Z}_3(M_{24}, \mathfrak{F}) \cdot \delta_{1[1..3],[1..3]}^\top \cdot \mathcal{D} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & -4 & 5 & -6 & 7 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 6 & -10 & 15 & -21 & 28 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 10 & -20 & 35 & -56 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -5 & 15 & -35 & 70 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -6 & 21 & -56 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -7 & 28 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &\quad \cdot \mathcal{Z}_3(M_{24}, \mathfrak{F}) \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \text{diag}\left(\frac{1}{1!}, \frac{1}{2!}, \frac{1}{3!}\right). \end{aligned}$$

Darin ist

$$\mathcal{Z}_3(A, \mathfrak{F}_i) = \begin{pmatrix} \binom{24}{0} \lambda_0^1 & \dots & \binom{24}{0} \lambda_0^3 \\ \vdots & & \vdots \\ \binom{24}{5} \lambda_5^1 & \dots & \binom{24}{5} \lambda_5^3 \\ \mathcal{P}_{0,6}(M_{24})^\wedge \cdot \odot^1 \mathfrak{F}_6 & \dots & \mathcal{P}_{0,6}(M_{24})^\wedge \cdot \odot^3 \mathfrak{F}_6 \\ \mathcal{P}_{0,7}(M_{24})^\wedge \cdot \odot^1 \mathfrak{F}_7 & \dots & \mathcal{P}_{0,7}(M_{24})^\wedge \cdot \odot^3 \mathfrak{F}_7 \\ b & \dots & b \end{pmatrix}$$



$$= \begin{pmatrix} 759 & 576081 & 437.245479 \\ 6072 & 1536216 & 388.662648 \\ 21252 & 1636404 & 126.003108 \\ 42504 & 892584 & 18.744264 \\ 53130 & 265650 & 1.328250 \\ 42504 & 42504 & 42504 \\ \gamma_{6,1}(\mathfrak{F}) & \gamma_{6,2}(\mathfrak{F}) & \gamma_{6,3}(\mathfrak{F}) \\ \gamma_{7,1}(\mathfrak{F}) & \gamma_{7,2}(\mathfrak{F}) & \gamma_{7,3}(\mathfrak{F}) \\ 759 & 759 & 759 \end{pmatrix}$$

mit von dem Lösungsvektor abhängigen Zahlen  $\gamma_{i,u}(\mathfrak{F}) = \mathcal{P}_{0,i}(M_{24})^{\cap} \cdot \odot^u \mathfrak{z}_i$ , und  $\mathfrak{z} = \sum_{\substack{j=1 \\ \mathfrak{z}(j)=1}}^{\ell_{\mathfrak{z}}} \mathfrak{b}_{8,j}^{\cap}$ . Wegen  $\mathfrak{x} = (0, 0, 1)$  vereinfacht sich dies zu  $\mathfrak{z} = \mathfrak{b}_{8,3}^{\cap}$ , d. h.

$$\mathfrak{z} = (759, 253, 77, 21, 5, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 1)^{\top}.$$

Aufgespalten ergibt sich

$$\begin{aligned} \mathfrak{z}_0 &= (759)^{\top}, & \mathfrak{z}_1 &= (253)^{\top}, & \mathfrak{z}_2 &= (77)^{\top}, \\ \mathfrak{z}_3 &= (21)^{\top}, & \mathfrak{z}_4 &= (5)^{\top}, & \mathfrak{z}_5 &= (1)^{\top}, \\ \mathfrak{z}_6 &= (0, 1)^{\top}, & \mathfrak{z}_7 &= (0, 1)^{\top}, & \mathfrak{z}_8 &= (0, 0, 1)^{\top}. \end{aligned}$$

Daraus berechnet man

$$\begin{aligned} \gamma_{6,u}(\mathfrak{F}) &= \begin{pmatrix} 113344 & 21252 \end{pmatrix} \cdot \odot^u (0, 1)^{\top} = 21252 \quad \text{für } u = 1, 2, 3, \\ \gamma_{7,u}(\mathfrak{F}) &= \begin{pmatrix} 340032 & 6072 \end{pmatrix} \cdot \odot^u (0, 1)^{\top} = 6072 \quad \text{für } u = 1, 2, 3 \end{aligned}$$

und erhält

$$\mathcal{A}^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 & 11385 & 26.179175 \\ 0 & 0 & 31.282944 \\ 0 & 170016 & 12.751200 \\ 0 & 0 & 2266880 \\ 0 & 106260 & 106260 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 759 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

◇

Das Ergebnis aus Satz 5.1.2 kann als Erweiterung von Lemma 2.3.2 angesehen werden. Die Bezeichnungen seien wie gehabt.

**5.1.4 Korollar** Sei  $\mathcal{D}$  ein  $t$ - $(v, k, \lambda)$  Design mit vorgeschriebener Automorphismengruppe  $A$  zum Lösungsvektor  $\mathfrak{x}$ . Dann gilt für  $s \geq 1$ :

$$\mathcal{B}_{[0, \dots, k], [0, \dots, k]} \cdot \mathcal{A}^{(s)} = \mathcal{Z}_s(A, \mathfrak{x}) \cdot \mathcal{S}_1^\top \cdot \mathcal{D}. \quad (5.11)$$

Inbesondere erhält man die Gleichungen aus Lemma 2.3.2 aus den ersten  $t + 1$  Zeilen dieses Gleichungssystems zurück.

*Beweis:* (5.11) ergibt sich direkt aus (5.5). In den ersten  $t + 1$  Zeilen erhält man

$$\mathcal{B}_{[0, \dots, t], [0, \dots, k]} \cdot \mathcal{A}^{(s)} = \text{diag}\left(\binom{v}{0}, \dots, \binom{v}{t}\right) \begin{pmatrix} \lambda_0^1 & \dots & \lambda_0^s \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda_t^1 & \dots & \lambda_t^s \end{pmatrix} \cdot \mathcal{S}_1^\top \cdot \mathcal{D},$$

woraus mit Lemma 1.3.19 (iii) wegen

$$\sum_{k=0}^s \lambda_i^k \cdot \mathcal{S}_1(u, k) \cdot \frac{1}{u!} = \frac{1}{u!} [\lambda_i]_u = \binom{\lambda_i}{u},$$

für  $i = 0, \dots, t$  und  $u = 1, \dots, s$  folgt:

$$\begin{aligned} &= \text{diag} \left( \binom{v}{0}, \dots, \binom{v}{t} \right) \cdot \begin{pmatrix} \binom{\lambda_0}{1} & \dots & \binom{\lambda_0}{s} \\ \vdots & & \vdots \\ \binom{\lambda_t}{1} & \dots & \binom{\lambda_t}{s} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \binom{v}{0} \binom{\lambda_0}{1} & \dots & \binom{v}{0} \binom{\lambda_0}{s} \\ \vdots & & \vdots \\ \binom{v}{t} \binom{\lambda_t}{1} & \dots & \binom{v}{t} \binom{\lambda_t}{s} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (5.12)$$

Auslesen der  $s$ -ten Spalte von (5.12) ergibt die erste Aussage von Lemma 2.3.2.

□

## 5.2 Klassifikation der 8-(31, 10, $\lambda$ ) Designs

Wir wollen die 8-(31, 10,  $\lambda$ ) Designs aus Abschnitt 3.2 klassifizieren. Es gibt 138 Designs mit  $\lambda = 93$  und 1658 Designs mit  $\lambda = 100$ . Die vorgeschriebene Gruppe ist  $A = \text{PSL}(3, 5)$  auf 31 Punkten. Für uns relevant ist folgende Untermatrix der Plesken-Matrix  $\mathcal{P}(A)^\wedge$ :

	$\ell_8 = 42$	$\ell_9 = 92$	$\ell_{10} = 174$
$\ell_8 = 42$	$I_{42}$	$\mathcal{P}_{8,9}(A)^\wedge$	$\mathcal{P}_{8,10}(A)^\wedge$
$\ell_9 = 92$	$\underline{0}$	$I_{92}$	$\mathcal{P}_{9,10}(A)^\wedge$
$\ell_{10} = 174$	$\underline{0}$	$\underline{0}$	$I_{174}$

Die Matrix  $\mathcal{P}_{8,10}(A)^\cap$  ist bereits in den Tabellen 3.3 und 3.4 gezeigt worden. Tabelle 5.2 zeigt  $\mathcal{P}_{8,9}(A)^\cap$ . Die Tabellen 5.3 bis 5.5 zeigen  $\mathcal{P}_{9,10}(A)^\cap$ , aufgeteilt in drei Teile. Es ist zu beachten, dass aus Platzgründen die Zahlen 10 und größer durch kleine Buchstaben  $a, b, c, \dots$  dargestellt werden.

Wir betrachten zunächst die 138 Designs mit  $\lambda = 93$ . Wir bezeichnen die Lösungen des Systems

$$\mathcal{P}_{8,10}(A)^\cap \cdot \mathfrak{f}^\top = 93 \cdot \mathbf{1}_{42 \times 1}.$$

mit  $\mathfrak{f}_1, \dots, \mathfrak{f}_{138}$ . Die Parameter  $\lambda_i$  sind:

$$\begin{array}{lll} \lambda_0 = 16\,303\,365, & \lambda_3 = 43\,524, & \lambda_6 = 4\,650, \\ \lambda_1 = 5\,259\,150, & \lambda_4 = 10\,881, & \lambda_7 = 744, \\ \lambda_2 = 1\,577\,745, & \lambda_5 = 2\,418, & \lambda_8 = 93. \end{array}$$

Die Werte von  $\binom{v}{i} = \binom{31}{i}$  für  $0 \leq i \leq 8$  sind

$$1, 31, 465, 4495, 31465, 169911, 736281, 2629575, 7\,888\,725.$$

Gemäß Satz 5.1.2, Gleichung (5.5) bestimmen sich die Schnittinvarianten  $\mathcal{A}^{(3)}$  wie folgt:

$$\mathcal{A}^{(3)} = \mathcal{B}_{[0..10],[0..10]}^{-1} \cdot \mathcal{Z}_s(A, \mathfrak{f}_i) \cdot \mathcal{J}_{1[1, \dots, 3][1, \dots, 3]}^\top \cdot \text{diag}\left(\frac{1}{1!}, \frac{1}{2!}, \frac{1}{3!}\right)$$





A large grid of numbers representing a design, with rows and columns of digits ranging from 1 to 6. The grid is approximately 60 columns wide and 60 rows high. The numbers are arranged in a pattern that is symmetric and complex, with some rows containing sequences of identical numbers and others containing more varied distributions. The grid is surrounded by a dotted border.

Tabelle 5.4:  $\mathcal{P}_{9,10}(\text{PSL}(3, 5))^\cap$ , mittlerer Teil

The table consists of a grid of numbers. The numbers are scattered across the grid, with some appearing in small clusters. The numbers are small integers, likely representing a specific mathematical function or data set. The grid is bounded by a dotted line.

Tabelle 5.5:  $\mathcal{P}_{9,10}(\mathrm{PSL}(3, 5))^\cap$ , rechter Teil



$$= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & -4 & 5 & -6 & 7 & -8 & 9 & -10 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 6 & -10 & 15 & -21 & 28 & -36 & 45 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 10 & -20 & 35 & -56 & 84 & -120 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -5 & 15 & -35 & 70 & -126 & 210 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -6 & 21 & -56 & 126 & -252 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -7 & 28 & -84 & 210 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -8 & 36 & -120 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -9 & 45 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \cdot Z_3(A, \mathfrak{r}_i) \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{6} \end{pmatrix}.$$

Hierbei ist  $Z_3(A, \mathfrak{r}_i)$  die Matrix

$$Z_3(A, \mathfrak{r}_i) = \begin{pmatrix} \binom{31}{0} \lambda_0^1 & \dots & \binom{31}{0} \lambda_0^3 \\ \vdots & & \vdots \\ \binom{31}{8} \lambda_8^1 & \dots & \binom{31}{8} \lambda_8^3 \\ \frac{\mathcal{P}_{0,9}(A)^\wedge \cdot \odot^1 \mathfrak{z}_9}{b} & \dots & \frac{\mathcal{P}_{0,9}(A)^\wedge \cdot \odot^3 \mathfrak{z}_9}{b} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 16\,303\,365 & 265\,799\,710\,323\,225 & 4333\,429\,694\,293\,805\,152\,125 \\ 163\,033\,650 & 857\,418\,420\,397\,500 & 4509\,292\,085\,633\,512\,125\,000 \\ 733\,651\,425 & 1157\,514\,867\,536\,625 & 1826\,263\,294\,681\,572\,410\,625 \\ 1956\,403\,800 & 851\,505\,189\,912\,000 & 370\,609\,118\,857\,298\,880\,000 \\ 3423\,706\,650 & 372\,533\,520\,586\,500 & 40\,535\,372\,375\,017\,065\,000 \\ 4108\,447\,980 & 99\,342\,272\,156\,400 & 2\,402\,096\,140\,741\,752\,000 \\ 3423\,706\,650 & 15\,920\,235\,922\,500 & 740\,290\,970\,39\,625\,000 \\ 1956\,403\,800 & 1\,455\,564\,427\,200 & 1082\,939\,933\,836\,800 \\ 733\,651\,425 & 68\,229\,582\,525 & 6\,345\,351\,174\,825 \\ \gamma_{9,1}(\mathfrak{x}_i) & \gamma_{9,2}(\mathfrak{x}_i) & \gamma_{9,3}(\mathfrak{x}_i) \\ 16\,303\,365 & 16\,303\,365 & 16\,303\,365 \end{pmatrix}$$

mit ganzen Zahlen

$$\begin{aligned} \gamma_{9,u}(\mathfrak{x}_i) &= \mathcal{P}_{0,9}(A)^{\cap} \cdot \odot^u \mathfrak{z}_9(\mathfrak{x}_i) \\ &= \mathcal{P}_{0,9}(A)^{\cap} \cdot \odot^u (\mathcal{P}_{9,10}(A)^{\cap} \cdot \mathfrak{x}_i^{\top}) \quad \text{für } 1 \leq u \leq 3. \end{aligned}$$

Nur die Zahlen  $\gamma_{9,u}(\mathfrak{x}_i)$  hängen von dem speziellen Design ab, alle anderen Größen bestimmen sich bereits aus den Parametern des Designs. Die Vektoren  $\mathcal{P}_{9,10}(A)^{\cap} \cdot \mathfrak{x}_i^{\top}$  für  $i = 1, 2, 3$  sind:

$$\mathfrak{z}_9(\mathfrak{x}_1) = (2, 2, 9, 9, 11, 6, 9, 9, 7, 4, 8, 9, 7, 11, 10, 18, 9, 5, 7, 7, 9, 7, 12, 8, 8, 10, 8, 8, 8, 4, 5, 6, 8, 9, 8, 8, 8, 8, 10, 10, 8, 8, 9, 10, 10, 12, 8, 9, 9, 8, 12, 9, 9, 8, 8, 7, 8, 9, 9, 9, 7, 10, 7, 8, 11, 9, 6, 4, 6, 9, 3, 7, 7, 5, 9, 6, 10, 9, 9, 8, 7, 8, 9, 7, 7, 5, 7, 10, 6, 12, 10, 9),$$

$$\mathfrak{z}_9(\mathfrak{x}_2) = (2, 2, 9, 9, 11, 6, 8, 11, 7, 4, 8, 9, 7, 7, 14, 18, 9, 5, 8, 7, 7, 8, 9, 9, 8, 8, 7, 8, 8, 7, 7, 9, 9, 7, 10, 7, 9, 8, 7, 6, 8, 9, 9, 10, 6, 12, 8, 10, 11, 8, 12, 8, 8, 6, 7, 7, 10, 9, 7, 10, 7, 9, 9, 5, 6, 8, 7, 6, 6, 7, 7, 9, 9, 13, 7, 18, 7, 11, 0, 8, 11, 6, 13, 9, 7, 8, 7, 8, 9, 1, 10, 9),$$

$$\mathfrak{z}_9(\mathfrak{x}_3) = (2, 2, 9, 9, 11, 6, 7, 8, 8, 7, 8, 9, 6, 15, 10, 18, 8, 9, 9, 6, 8, 8, 12, 6, 8, 10, 7, 7, 8, 8, 7, 7, 8, 7, 8, 8, 8, 7, 10, 6, 7, 9, 8, 10, 8, 12, 7,$$

10, 10, 6, 9, 10, 6, 10, 8, 9, 8, 6, 11, 8, 11, 6, 7, 9, 9, 11, 10, 7, 7, 8, 5,  
7, 9, 7, 7, 6, 7, 8, 9, 9, 5, 9, 10, 7, 13, 9, 7, 4, 6, 10, 6, 9).

Daraus ergibt sich

$\mathcal{D}_{\mathbb{F}_1} :$	$u$	$\gamma_{9,u}(\mathbb{F}_1)$	$\alpha_9^{(u)}(\mathcal{D}_{\mathbb{F}_1})$
	1	163 033650	0
	2	1369 201800	603 084075
	3	11863 610100	1347 012000
$\mathcal{D}_{\mathbb{F}_2} :$	$u$	$\gamma_{9,u}(\mathbb{F}_2)$	$\alpha_9^{(u)}(\mathcal{D}_{\mathbb{F}_2})$
	1	163 033650	0
	2	1377 385800	607 176075
	3	12092 018100	1380 988000
$\mathcal{D}_{\mathbb{F}_3} :$	$u$	$\gamma_{9,u}(\mathbb{F}_3)$	$\alpha_9^{(u)}(\mathcal{D}_{\mathbb{F}_3})$
	1	163 033650	0
	2	1367 341800	602 154075
	3	11903 600100	1354 607000

Da die Werte von  $\alpha_9^{(2)}(\mathcal{D}_{\mathbb{F}_i})$  stets verschieden sind, folgern wir, dass  $\mathcal{D}_{\mathbb{F}_1}$ ,  $\mathcal{D}_{\mathbb{F}_2}$  und  $\mathcal{D}_{\mathbb{F}_3}$  paarweise nicht isomorphe Designs sind. Wir präsentieren eine Tabelle aller Werte von  $\alpha_9^{(2)}(\mathcal{D}_{\mathbb{F}_i})$  für  $1 \leq i \leq 138$ . Die Tabelle zeigt die sortierten Werte von  $\alpha_9^{(2)}(\mathcal{D}_{\mathbb{F}_i})$ . Die Indizes  $i$  der Designs  $\mathcal{D}_{\mathbb{F}_i}$  werden anschließend aufgeführt.

591 366075 für {25}

597 225075 für {107}

593 226075 für {110}

597 318075 für {23, 128}

594 342075 für {95}

597 504075 für {5, 35}

595 830075 für {111}

597 597075 für {15, 46}

596 853075 für {87}

597 969075 für {8}

597 039075 für {102}

598 248075 für {126}

- 598 341075 für [14]  
598 434075 für [118, 132]  
598 527075 für [96]  
598 806075 für [79]  
598 899075 für [32, 70, 112]  
598 992075 für [97, 100]  
599 085075 für [48]  
599 643075 für [49]  
599 829075 für [44, 119]  
599 922075 für [64]  
600 015075 für [41]  
600 108075 für [43]  
600 201075 für [16, 122]  
600 480075 für [75]  
600 573075 für [89]  
600 666075 für [134]  
600 759075 für [7, 36, 68]  
600 852075 für [106, 131]  
601 131075 für [101, 103, 105]  
601 224075 für [10]  
601 317075 für [40]  
601 503075 für [127]  
601 689075 für [39, 120, 137]  
601 782075 für [69]  
601 968075 für [62, 88]  
602 154075 für [3, 18, 45, 94]  
602 433075 für [13, 109]  
602 526075 für [66]  
602 619075 für [93, 133]  
602 712075 für [34]  
602 805075 für [56, 57, 67]  
602 898075 für [50, 61, 90]  
602 991075 für [51, 86]  
603 084075 für [1, 21, 54, 77, 108, 113]  
603 177075 für [72]  
603 270075 für [12, 59, 124]  
603 363075 für [81, 117]  
603 456075 für [84]  
603 549075 für [65]  
603 642075 für [91, 115, 116]  
603 735075 für [104]  
604 014075 für [22]  
604 107075 für [26]  
604 386075 für [11, 76, 129]  
604 479075 für [31, 55]  
604 665075 für [9, 136]  
604 758075 für [29, 37]  
604 944075 für [98]  
605 223075 für [47]  
605 316075 für [30]  
605 409075 für [28]  
605 595075 für [33, 73, 123]  
605 967075 für [80]  
606 153075 für [19, 92]  
606 339075 für [53, 82, 85, 135]  
606 525075 für [125]  
606 618075 für [17, 121]  
606 897075 für [60]  
607 176075 für [2, 130]  
607 641075 für [4, 6]  
608 199075 für [114]  
608 292075 für [38, 74]

608 385075 für [99]	610 152075 für {78}
608 478075 für [52]	610 803075 für {58}
608 571075 für [83]	611 175075 für {63}
608 664075 für [24, 42]	611 268075 für {71, 138}
609 315075 für [20]	
609 873075 für [27]	

Wir erhalten die folgenden Klassengrößen:  $1^{48}, 2^{23}, 3^{10}, 4^2, 6^1$ . Eine feinere Klassifikation ergibt sich durch Wahl von  $s = 3$ . Diese Klassifikation ist diskret, d. h. keine zwei Designs haben dieselbe Schnittmatrix  $\mathcal{A}^{(3)}$ . Somit sind alle 138 Designs verschieden. Wir zeigen an einem Beispiel, wie sich eine Klasse der  $s = 2$  Klassifikation aufspaltet, wenn man zu  $s = 3$  übergeht. Wir betrachten die größte Klasse mit 6 Elementen:

$$\{\mathcal{D}_{\mathbb{F}_1}, \mathcal{D}_{\mathbb{F}_{21}}, \mathcal{D}_{\mathbb{F}_{54}}, \mathcal{D}_{\mathbb{F}_{77}}, \mathcal{D}_{\mathbb{F}_{108}}, \mathcal{D}_{\mathbb{F}_{113}}\}.$$

Alle Designs haben  $\alpha_9^{(2)}(\mathcal{D}_{\mathbb{F}_i}) = 603\,084\,075$ . Die Tupel  $(\alpha_9^{(2)}(\mathcal{D}_{\mathbb{F}_i}), \alpha_9^{(3)}(\mathcal{D}_{\mathbb{F}_i}))$  für diese Designs sind:

( 603 084075 , 1341 757500 )	für $\mathcal{D}_{\mathbb{F}_{108}}$ ,
( 603 084075 , 1347 012000 )	für $\mathcal{D}_{\mathbb{F}_1}$ ,
( 603 084075 , 1350 236000 )	für $\mathcal{D}_{\mathbb{F}_{21}}$ ,
( 603 084075 , 1353 382500 )	für $\mathcal{D}_{\mathbb{F}_{113}}$ ,
( 603 084075 , 1360 993000 )	für $\mathcal{D}_{\mathbb{F}_{77}}$ ,
( 603 084075 , 1362 419000 )	für $\mathcal{D}_{\mathbb{F}_{54}}$ .

Die 1658 Designs mit  $\lambda = 100$  können ebenfalls durch Betrachten ihrer Schnittzahlen mit  $s \leq 3$  vollständig klassifiziert werden.



# Literaturverzeichnis

- [1] AIGNER, MARTIN: *Combinatorial theory. Nachdruck der Ausgabe von 1979.* Classics in Mathematics. Springer, Berlin, 1997.
- [2] BETH, THOMAS, DIETER JUNGNICKEL und HANFRIED LENZ: *Design theory.* Cambridge University Press, Cambridge, 1986.
- [3] BETTEN, ANTON, EVI HABERBERGER, REINHARD LAUE und ALFRED WASSERMANN: *DISCRETA – Ein Programmsystem zur Konstruktion von  $t$ -Designs.* Lehrstuhl II für Mathematik, Universität Bayreuth, 1999. <http://www.mathe2.uni-bayreuth.de/~discreta>.
- [4] BETTEN, ANTON, ADALBERT KERBER, REINHARD LAUE und ALFRED WASSERMANN: *Simple 8-Designs with Small Parameters.* Designs, Codes, Cryptography, 15:5–27, 1998.
- [5] BETTEN, ANTON, REINHARD LAUE und ALFRED WASSERMANN: *Simple 6 and 7-designs on 19 to 33 points.* Congressus Numerantium, 123:149–160, 1997.
- [6] BETTEN, ANTON, REINHARD LAUE und ALFRED WASSERMANN: *Simple 7-Designs with Small Parameters.* J. of Combinatorial Designs, 7:79–94, 1999.
- [7] BOLICK, JÖRN:  *$t$ -Designs und Schnittzahlen,* 1990. Diplomarbeit, Universität Hamburg.

- [8] CAMERON, P. J. und J. H. VAN LINT: *Designs, graphs, codes and their links*, Band 22 der Reihe *London Mathematical Society Student Texts*. Cambridge University Press, Cambridge, 1991.
- [9] COLBOURN, CHARLES J. und JEFFREY H. DINITZ (Herausgeber): *The CRC handbook of combinatorial designs*. CRC Press Series on Discrete Mathematics and its Applications. CRC Press, Boca Raton, FL, 1996.
- [10] DEMBOWSKI, PETER: *Finite geometries*. Classics in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 1997. Nachdruck der ersten Auflage von 1968.
- [11] HALDER, HEINZ-RICHARD und WERNER HEISE: *Einführung in die Kombinatorik. Mit einem Anhang über formale Potenzen*. Carl Hanser Verlag, München - Wien, 1977.
- [12] IYANAGA, SHOKICHI (ED.) und YUKIYOSI (ED.) KAWADA: *Encyclopedic dictionary of mathematics. In two volumes. Transl. rev. by Kenneth O. May*. MIT Press, Cambridge, Massachusetts; London, 1980.
- [13] KERBER, ADALBERT: *Applied finite group actions*. Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 1999.
- [14] KIRKMAN, T. P.: *On a problem in combinatorics*. Cambridge and Dublin Math. J., 2:191–204, 1847.
- [15] KIRKMAN, T. P.: *Note on an unanswered price question*. Cambridge and Dublin Math. J., 5:255–262, 1850.
- [16] KIRKMAN, T. P.: *Query IV. Lady's and Gentleman's Diary.*, 1850.
- [17] KNUTH, DONALD E.: *The art of computer programming. Vol. 2*. Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Mass., Zweite Auflage, 1981. Seminumerical algorithms, Addison-Wesley Series in Computer Science and Information Processing.



- [18] KÖHLER, EGMONT: *Allgemeine Schnittzahlen in  $t$ -designs*. In: *Proceedings of the Oberwolfach Meeting "Kombinatorik" (1986)*, Band 73, Seiten 133–142, 1988/89.
- [19] KRAMER, EARL S. und DALE M. MESNER:  *$t$ -designs on hypergraphs*. *Discrete Math.*, 15(3):263–296, 1976.
- [20] KRÄMER, HELMUT: *Inversion of Incidence Mappings*. *Semin. Lothar. Comb.*, 39, B39f:20 p, 1997. <http://www.emis.de:80/journals/SLC/>.
- [21] KRÄMER, HELMUT: *Eigenspace decompositions with respect to symmetrized incidence mappings*. *Semin. Lothar. Comb.*, 41, B41c:20 p, 1998. <http://www.emis.de:80/journals/SLC/>.
- [22] KREHER, DONALD L.: *An incidence algebra for  $t$ -designs with automorphisms*. *J. Comb. Theory, Ser. A*, 42:239–251, 1986.
- [23] KREHER, DONALD L.: *A generalization of Connor's inequality to  $t$ -designs with automorphisms*. *J. Comb. Theory, Ser. A*, 50(2):259–268, 1989.
- [24] LAUE, REINHARD: *Halvings on small point sets*. *Journal of Combinatorial Designs*, 97:233–241, 1999.
- [25] LINT, J. H. VAN und R. M. WILSON: *A course in Combinatorics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1992.
- [26] MANBER, UDI: *Introduction to algorithms. A creative approach*. Addison-Wesley Verlag, Bonn etc., 1989.
- [27] MENDELSON, N. S.: *Intersection numbers of  $t$ -designs*. In: *Studies in Pure Mathematics (Presented to Richard Rado)*, Seiten 145–150. Academic Press, London, 1971.

- [28] PLESKEN, WILHELM: *Counting with groups and rings*. J. Reine Angew. Math., 334:40–68, 1982.
- [29] RAY-CHAUDHURI, DIJEN K. und RICHARD M. WILSON: *On  $t$ -designs*. Osaka J. Math., 12:737–744, 1975.
- [30] SCHMALZ, BERND:  *$t$ -Designs zu vorgegebener Automorphismengruppe*. Bayreuth, Math. Schr., 41:1–164, 1992. Dissertation, Universität Bayreuth, Bayreuth, 1992.
- [31] SEBILLE, MICHEL: *Designs: extensions et groupes primitifs*, 1998. Diplomarbeit, Université Libre de Bruxelles.
- [32] TRUNG, TRAN VAN, QIU-RONG WU und DALE M. MESNER: *High order intersection numbers of  $t$ -designs*. J. Statist. Plann. Inference, 56(2):257–268, 1996. Special issue on orthogonal arrays and affine designs, Part II.
- [33] WASSERMANN, ALFRED: *Finding simple  $t$ -designs with enumeration techniques*. J. of Combinatorial Designs, 6(2):79–90, 1998.
- [34] WIELANDT, HELMUT: *Finite permutation groups*. Academic Press, New York, London, 1964.
- [35] WILSON, R. ET AL.: *ATLAS of Finite Group Representations*., 1999. <http://for.mat.bham.ac.uk/atlas/>.
- [36] WITT, ERNST: *Über Steinersche Systeme*. Abh. Math. Semin. der Universität Hamburg, 12:265–275, 1938.

# Index

$[x]^n$ , *siehe* steigende Faktorielle

$[x]_n$ , *siehe* fallende Faktorielle

$\|\cdot\|$ , *siehe* Typ einer Partition

$\binom{n}{a_1, a_2, \dots, a_r}$ , *siehe* Multinomialkoeffizient

$\odot$ , *siehe* Hadamard-Produkt

$\bar{\cdot}$ , *siehe* Partition

$|\cdot|$ , *siehe* Gewicht einer Partition

3-(8, 4, 1) Design, 54

2-(15, 3, 1) Design, 3

5-(24, 8, 1) Design, 56, 106

8-(31, 10,  $\lambda$ ) Designs, 58–63, 111–121

$\mathcal{A}^{(s)}$ , *siehe* Matrix der globalen Schnittzahlen

$\mathcal{A}^{[s]}$ , *siehe* Matrix der globalen Schnittzahlen

$\alpha(B_0)$ , *siehe* Block-Schnitttyp

$\alpha_i(B_0)$ , *siehe* Block-Schnittzahl

$\alpha_i(M)$ , *siehe* Schnittzahl

$\alpha_i^{(s)}(M)$ , *siehe* Schnittzahlen höherer Ordnung

$\alpha_i^{(s)}(\mathcal{D})$ , *siehe* globale Schnittzahl eines Designs

$\alpha_i^{[s]}(\mathcal{D})$ , *siehe* globale Schnittzahl eines Designs

$\alpha_{ijk}^0$ , 73

$\alpha_{u,v,w}^{(i,j,k)\vee}$ , 86

$\alpha_{u,v,w}^{(i,j,k)\wedge}$ , 86

$\alpha_{u,v}^{(i,j)\vee}$ , 86

$\alpha_{u,v}^{(i,j)\wedge}$ , 86

abgeleitetes Design, 8

Absorptionsgesetz, 72

Antifahne, 2

Antikette, 70

Automorphismengruppe  
von Designs, 2

Automorphismus  
von Designs, 2

$B(n)$ , *siehe* Bell-Zahl

$\mathcal{B}$ , *siehe* Design

$\mathcal{B}$ , *siehe* Matrix der Binomialkoeffizienten

Bell-Zahl, 21

Binomialkoeffizienten  
Matrix der  $\sim$ , 30

Block, 1

- $\sim$ -Schnitttyp, 32
  - $\sim$ -Schnittzahl, 32
- Blockgröße, 2
- $\mathcal{D}^c$ , *siehe* komplementäres Design
- Dekomposition, 11
- Delsarte, 31
- $\text{der}_p \mathcal{D}$ , *siehe* abgeleitetes Design
- Design, 2
  - 3-(8, 4, 1)  $\sim$ , 54
  - 2-(15, 3, 1)  $\sim$ , 3
  - 5-(24, 8, 1)  $\sim$ , 56, 106
  - 8-(31, 10,  $\lambda$ )  $\sim_s$ , 58–63, 111–121
  - abgeleitetes  $\sim$ , 8
  - Automorphismengruppe, 2
  - Automorphismus, 2
  - Block-Schnittzahl, 32
  - Blockgröße, 2
  - Ein-Block  $\sim$ , 6
  - Index, 2
  - Isomorphie, 2
  - komplementäres  $\sim$ , 7, 11
  - Konstruktion von  $\sim_s$ , 49–57
  - leeres  $\sim$ , 6
  - Parameter, 2, 5–11
  - Parameter  $\lambda_{i,j}$ , 10
  - Punktregularität, 2
  - residuelles  $\sim$ , 8
  - Schnitttyp, 32
  - Schnittzahlen
    - gewöhnliche, 32–34
    - globale, 43–47, 101
    - höhere, 34–42
  - Steiner-System, 2
  - supplementäres  $\sim$ , 6
  - triviales  $\sim$ , 6
  - vollständiges  $\sim$ , 6
  - Wiederholungsanzahl, 3
  - Witt- $\sim$ , 55, 106
  - zum reduzierten  $t$ , 6
- Diagramm
  - Ferrers  $\sim$ , 17
- Differenzpartition, 19
- DISCRETA, 53
- $\Delta\lambda$ , 7
- Dodekaeder, 78
- $\mathcal{D} = (\mathcal{V}, \mathcal{B})$ , *siehe* Design
- Ein-Block Design, 6
- Fahne, 1
- Faktorielle
  - fallende  $\sim$ , 7, 26
  - steigende  $\sim$ , 26
- fallende Faktorielle, 7, 26
- Ferrers Diagramm, 17
- Gewicht einer Partition, 15
- Gewichtsfunktion
  - $\nu$ , 100
  - auf  $\mathbb{Z}[\mathfrak{P}(\mathcal{V})]$ , 45

- Gewichtsraum  $\mathcal{W}_v$ , 45  
 globale Schnitzzahl eines Designs, 43  
 globale Schnitzzahlen, 101  
 Gruppenoperation  
   auf Halbgruppe, 70  
   auf Poset, 70  
   auf Verband, 72  
 Gruppenring, *siehe* Halbgruppenring  
  
 Hadamard-Produkt, 81  
 Halbgruppe, 70  
 Halbgruppenring, 44  
 Halbordnung, 70  
  
 $\iota$ , 80  
 Index, 2  
 Infimum, 71  
 Inklusions- / Exklusionsprinzip, 9  
 Inzidenzmatrix, 2  
 Inzidenzrelation, 1  
 Inzidenzstruktur, 1–5  
   Antifahne, 2  
   Blöcke, 1  
   Design, 2  
   Fahne, 1  
   Inzidenzstruktur, 2  
   Punkte, 1  
 inzidieren, *siehe* Inzidenzrelation  
 Isomorphie  
   von Designs, 2  
  
 $\kappa$ , *siehe* Gewichtsfunktion  
 $k$ , *siehe* Blockgröße  
 Kette, 70  
 Kirkman, 3  
 Köhler, 33  
   verallgemeinerte  $\sim$ -Gleichungen,  
     40  
 komplementäres Design, 7, 11  
 konjugierte Partition, 17  
 Kramer, Earl S., 50  
  
 $L^{(i)}(\mathcal{L})$ , *siehe* Schicht eines Verbandes  
  
 $\lambda$ , *siehe* Index  
 $\lambda_{i,j}^{(s)}$ , 35  
 Länge einer Partition, 15  
 $\lambda_i$ , 5  
 $\lambda_{\max}$ , 6  
 Lemma  
   Inklusion / Exklusion, 9  
   Plesken, 73  
 $\lambda_{i,j}$ , 10  
 Linear-Programming-Bound, 31  
 $\ell(p)$ , *siehe* Länge einer Partition  
  
 $M_{24}$ , *siehe* Mathieu-Gruppe  
 Mathieu-Gruppe, 55  
 Matrix der Binomialkoeffizienten, 30  
 Matrix der globalen Schnitzzahlen, 100  
 Mendelsohn, 32

- verallgemeinerte  $\sim$ -Gleichungen, 39
- Mengenpartition, 12
- Mesner, Dale M., 35, 38–40, 50
- Multimenge, 11
  - Standardform, 11
- Multinomialkoeffizient, 18
- Multinomialsatz, 25
- $\nu$ , *siehe* Gewichtsfunktion
- $\mathcal{O}_{i,j}$ , 86
- $o_{i,j}$ , 86
- $\Pi(N)$ , *siehe* Partition
- $\Pi(n)$ , *siehe* Partition
- $\mathcal{P}(A)^\vee$ , *siehe* Plesken-Matrix
- $\mathcal{P}(A)^\wedge$ , *siehe* Plesken-Matrix
- Parameter
  - von Designs, 2, 5–11
  - zulässige, 7
- Partition, 11–30
  - Diagramm, 17
  - Differenz $\sim$ , 19
  - Gewicht, 15
  - konjugierte  $\sim$ , 17
  - Länge, 15
  - Mengen $\sim$ , 12
  - Standardform, 14
  - Typ, 16
  - Zahl $\sim$ , 12
- Zykeltyp, 19
- Plesken, 73, 81
- Plesken-Matrix
  - $\mathcal{P}(A)^\vee$ , 74
  - $\mathcal{P}(A)^\wedge$ , 74
  - des Dodekaeders, 79
- Plesken-Ring, 79–84
  - des Dodekaeders, 84
- Poset, 70
  - mit Gruppenoperation, 70
- Punktregularität, 2
- $r$ , *siehe* Wiederholungsanzahl
- Rangfunktion
  - eines Verbandes, 85
- red  $\mathcal{D}$ , *siehe* Design zum reduzierten  $t$
- res $_p \mathcal{D}$ , *siehe* residuelles Design
- residuelles Design, 8
- $r(n, k)$ , *siehe* Stirling-Zahl erster Art, vorzeichenlos
- Satz
  - Multinomialsatz, 25
  - von Köhler, 33
  - von Kramer und Mesner, 50
  - von Mendelsohn, 32
  - von Plesken, 81
  - von Tran van Trung, Qiu-rong Wu, Dale M. Mesner, 35, 39, 40

- Schicht  
 eines Verbandes, 86
- Schnitttyp, 32
- Schnittzahlen, 32  
 Berechnung, 99–111  
 gewöhnliche, 32–34  
 globale, 43–47  
 Matrix der globalen  $\sim$ , 100  
 höhere, 34–42
- Schranke, 71
- Schulmädchenproblem, 3
- $\mathfrak{S}_1(n, k)$ , *siehe* Stirling-Zahl erster Art
- $\mathfrak{S}_2(n, r)$ , *siehe* Stirling-Zahl zweiter Art
- Standardform  
 einer Multimenge, 11
- Standardform einer Partition, 14
- steigende Faktorielle, 26
- Steiner-System, 2
- Stirling-Zahl  
 erster Art, 27  
 vorzeichenlos, 26  
 zweiter Art, 20
- $\text{supp } \mathcal{D}$ , *siehe* supplementäres Design
- supplementäres Design, 6
- Supremum, 71
- $t$ , *siehe* Punktregularität
- Teil  
 einer Dekomposition, 12
- Teilmengenverband, 86, 93–98
- topologische Nummerierung, 74
- Tran van Trung, 35, 38–40
- triviales Design, 6
- Untergruppenverband, 85
- $\mathcal{V}$ , *siehe* Design
- $v$ , *siehe* Design
- Verband, 71  
 der Teilmengen, 86, 93–98  
 Einselement, 73  
 mit Gruppenoperation, 72  
 Nullelement, 73  
 Rangfunktion, 85  
 Schicht, 86  
 Untergruppen $\sim$ , 85
- vollständiges Design, 6
- vorzeichenlose Stirling-Zahl erster Art,  
 26
- Wiederholungsanzahl, 3
- Witt-Design, 55, 106
- Wu, Qiu-rong, 35, 38–40
- $Z_s(A, \mathfrak{r})$ , 102
- Zahlpartition, 12
- Zerlegung, *siehe* Dekomposition
- zulässige Parameter, 7
- Zykeltyp, 19