

Adaptive finite element methods for differential equations

von: **Wolfgang Bangerth und Rolf Rannacher**

Verlag: Birkhäuser, 2003, 216 Seiten, EUR 22

Serie: Lectures in Mathematics ETH Zürich

Gegenstand des Buches ist die *Dual Weighted Residual method* (DWR), ein sehr effizientes numerisches Verfahren zur Behandlung einer großen Klasse von variationell formulierten Differentialgleichungen. Das numerische Verfahren ist adaptiv, d.h. es konstruiert eigenständig eine Folge von Approximationen für eine gegebene Fragestellung. Typische Fragestellungen sind die Bestimmung gewichteter Mittelwerte der Lösung oder ihrer Ableitungen, die Bestimmung von Randintegralen über Lösungskomponenten (relevant z.B. für die Berechnung von strömungsmechanischen Kenngrößen) oder die Bestimmung von Spannungsintensitätsfaktoren (z.B. in der Bruchmechanik). Das Verfahren basiert auf Projektionsmethoden wie z.B. der Finiten Elemente Methode (FEM). Dort wird die Approximationsgüte durch die Wahl der Gitter gesteuert. Der Kern jeder adaptiven FEM ist deshalb die Art, wie die Gitter gewählt werden. Typischerweise geschieht dies in einer adaptiven Schleife, in der in mehreren Durchgängen schrittweise das Gitter verbessert wird, bis eine gewünschte Genauigkeit erreicht ist. Bei der DWR wird in jedem Schleifendurchgang ein lineares Hilfsproblem—das sog. duale Problem, welches von der vorliegenden Fragestellung abhängt—(näherungsweise) gelöst. Weiterhin wird eine Approximation der Differentialgleichung bestimmt. Aus diesen nun vorliegenden Daten wird dann herausdestilliert, wo das Gitter verfeinert werden sollte bzw. vergrößert werden kann, um eine genauere Lösung zu erhalten. Ziel eines adaptiven Algorithmus ist, das gewünschte Ergebnis möglichst effizient zu bestimmen, d.h. mit möglichst geringem Bedarf an Ressourcen (Rechenzeit, Speicherbedarf etc.). Mit zahlreichen Beispielen belegt das Buch, daß die DWR dieses Ziel erreicht. Es sei hier besonders hervorgehoben, daß eine Kosten-Nutzen-Betrachtung für die DWR besonders bei nichtlinearen Problemen günstig ausfällt, da die Kosten für die Lösung des linearen Hilfsproblems vergleichbar mit denen eines Newtonschrittes sind und somit nur einen kleinen Teil der Gesamtkosten ausmachen.

Das Buch gibt einen sehr guten Überblick über die Technik und die Möglichkeiten der DWR. In einleitenden Kapiteln wird die DWR an gewöhnlichen Differentialgleichungen und dann an einfachen linearen, elliptischen partiellen Differentialgleichungen sehr klar und verständlich vorgeführt. Anschließend wird die DWR in einem abstrakten funktional-analytischen Rahmen vorgestellt. Der Rest des Buches illustriert auf eindrucksvolle Weise die Leistungsfähigkeit und Breite der Anwendungsfähigkeit des Konzeptes an Hand von Fallbeispielen: Es werden Eigenwertprobleme, Optimierungsaufgaben mit Zwangsbedingungen, die durch eine partielle Differentialgleichung gegeben sind, Strukturmechanikprobleme (lineare Elastizität, Plastizität), Strömungsmechanik (hydrodynamische Stabilitätsanalyse, Berechnung von Strömungskennwerten) behandelt. Auch zeitabhängige Probleme wie die Lösung der Wellengleichung werden mit der DWR erfolgreich bearbeitet. Insgesamt wird klar ersichtlich, daß die DWR eine sehr flexible und vielseitig anwendbare Technik ist. Die ausgewählten numerischen Beispiele, die vor allem aus umfangreichen numerischen Untersuchungen der Gruppe von Rolf Rannacher aus den letzten 10 Jahren ausgewählt wurden, sind sehr illustrativ. Die Erläuterungen zu den Beispielen sind auch deshalb interessant, weil eine Menge zusätzlicher Informationen über die numerische Behandlung des vorliegenden Problems quasi nebenbei einfließen.

Das Buch entstand aus einer fortgeschrittenen Spezialvorlesung, die an der ETH Zürich gehalten wurde. Einen Lehrbuchcharakter erhält das Buch dadurch, daß Übungsaufgaben (mit detaillierten Lösungen im Anhang) jedes Kapitel abschließen. Die Aufgaben enthal-

ten zahlreiche praktische Übungen, die mit der Softwarebibliothek DEAL II zu lösen sind. Sowohl die Bibliothek als auch die Lösungen werden im Internet bereitgestellt. Das Buches ist jedoch kein Lehrbuch für “Anfänger” im Bereich der FEM. Notationen folgen den auf dem Gebiet der FEM üblichen Konventionen und werden deshalb nur knapp erklärt. Hin und wieder werden fortgeschrittene mathematische Aussagen ohne Referenz gemacht. Bei den anspruchsvolleren Beispielen im hinteren Teil des Buches wird zugunsten eines klaren Herausarbeitens der Spezifika der DWR auf eine detaillierte Diskussion zahlreicher Diskretisierungsaspekte wie z.B. Stabilisierung bei Strömungsproblemen verzichtet. Obwohl auf Literatur verwiesen wird, sind für ein vertieftes Verständnis dieser Beispiele gute Kenntnisse der FEM-Literatur notwendig.

Insgesamt stellt das Buch für Forscher einen sehr guten Überblick über die Leistungsfähigkeit der DWR dar. Auch für eine Spezialvorlesung bietet das Buch dem Vortragenden reichlich Material zur Auswahl.